

ON MIPA Perguruan Tinggi 2011

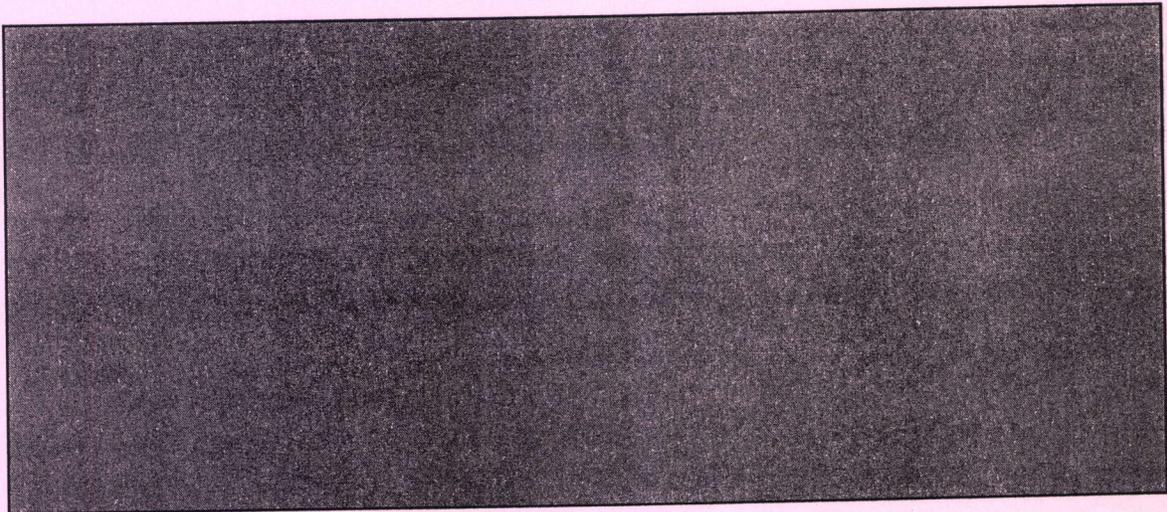


Bidang Matematika

31 Maret 2011

Waktu 120 Menit

Aljabar Linier



OLIMPIADE NASIONAL MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PERGURUAN TINGGI 2011
(ONMIPA-PT)

BIDANG MATEMATIKA

31 MARET 2011

WAKTU: 120 MENIT

Aljabar Linier

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 10 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 3 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang disediakan. Jawaban yang dikhendaki adalah jawaban benar yang terbaik.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
6. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
7. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
8. Bekerjalah dengan cepat, tetapi cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
9. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Definisi dan notasi:

$\mathbb{R}^{k \times m}$: himpunan semua matriks real berukuran $k \times m$

P_k : ruang polinom real berderajat paling tinggi k .

Misalkan U, V ruang vektor dan $T : U \rightarrow V$ linier.

Inti(T): himpunan $\{\mathbf{x} \in U \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$

Nama: _____

Univ./PT: _____

BAGIAN PERTAMA

1. Diketahui bahwa V adalah subruang dari P_3 yang dibangun oleh $\{x^3 + x^2, x^3 + x, x + 1, x^2 + 1\}$, maka dimensi V adalah ...

2. Misalkan $A = [a_{ij}]$ matriks berukuran 2011×2011 . Jika $a_{ij} = i + j$ untuk setiap i, j , maka $\text{rank}(A) = \dots$

3. Bidang B di \mathbb{R}^3 melalui titik-titik $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, dan $(0, 0, -1)$. Vektor satuan yang tegak lurus terhadap bidang B adalah ...

4. Diberikan vektor-vektor $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 1)$ di \mathbb{R}^3 . Proses ortonormalisasi Gram-Schmidt pada $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ menghasilkan vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Maka $\mathbf{v}_2 = \dots$

5. Misalkan A dan B matriks-matriks real berukuran berturut-turut 4×2 dan 2×4 . Jika

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

maka $BA = \dots$

6. Misalkan $T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ adalah transformasi linier yang didefinisikan sebagai

$$T(p(x)) = \int_0^1 p(x) dx, \text{ untuk setiap } p(x) \in P_2.$$

Maka dimensi $\text{Inti}(T)$ adalah ...

7. Misalkan $\mathbf{v} = (1, -2, 4)$, $\mathbf{w} = (-3, 6, k) \in \mathbb{R}^3$. Jika tidak ada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ sehingga \mathbf{w} adalah hasil proyeksi \mathbf{u} pada \mathbf{v} , maka himpunan semua nilai k yang mungkin adalah ...

8. Misalkan $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_3$, untuk setiap $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Maka f bukan hasilkali dalam di \mathbb{R}^3 karena tidak memenuhi sifat ...

9. Misalkan matriks $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Jika A mempunyai k kolom yang sama, maka dimensi ruang eigen A untuk nilai eigen $\lambda = 0$ paling sedikit adalah ...

10. Misalkan T operator linier pada $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ yang didefinisikan sebagai

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}, \text{ untuk setiap } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Jika A adalah vektor eigen T untuk nilai eigen -1 , maka $\det(A) = \dots$

Nama: _____

Univ./PT: _____

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $A = [a_{ij}]$ matriks berukuran 2011×2011 dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|} & \text{jika } i \neq j \\ 2 & \text{jika } i = j. \end{cases}$$

Tentukan $\det(A)$.

Nama: _____

Univ./PT: _____

2. Misalkan G operator linier pada $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ yang memetakan $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ke $G(A) = A^T$, yaitu transpos dari A . Periksa apakah G dapat didiagonalkan. Jika ya, berikan suatu diagonalisasi dari G .

Nama: _____

Univ./PT: _____

3. Misalkan V adalah subruang dari \mathbb{R}^{50} yang dibangun oleh vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{50}$. Jika himpunan semua entri (komponen) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{50}$ adalah himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, 2500\}$, tentukan nilai terkecil dan nilai terbesar yang mungkin untuk $\dim(V)$.