Olimpiade Nasional Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
PERGURUAN TINGGI 2011
(ONMIPA-PT)

Bidang Matematika
30 Maret 2011
Waktu: 120 menit

Analisis Real

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 10 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 3 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang disediakan. Jawaban yang dikehendaki adalah jawaban benar yang terbaik.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
6. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
7. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
8. Bekerjalah dengan cepat, tetapi cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
9. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Nama: ______________________ Univ./PT: __________

BAGIAN PERTAMA

1. Infimum dari himpunan $\{n \in \mathbb{N} : (n!)^{-}\}$ adalah ....

2. Misalkan $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ adalah fungsi-fungsi injektif yang diferensiabel. Definisikanlah sebuah kombinasi fungsi dari f dan g sehingga dipenuhi sifat: jika $f(0) = g(1) = 0$, maka terdapat $c \in (0,1)$ sedemikian hingga $|\frac{(u\ (c))}{(v\ (c))}| = 2011$, untuk $u(x) = \ln f(x)$ dan $v(x) = \ln g(x)$, $\forall x \in (0,1)$.

3. Jika fungsi nonnegatif f terintegralkan Riemann pada $[a,b]$ dan $0 \leq m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a,b]$, tentukan nilai c dan d sehingga $c \leq (\int_a^b f^2)^{-} \leq d$.

4. Barisan (S_n) dengan $S_n = (\frac{1}{n})^n + (\frac{2}{n})^n + \ldots + (\frac{n}{n})^n$ konvergen ke ..

5. Beri contoh suatu barisan dari fungsi-fungsi kontinu (f_n) yang terdefinisi pada $[0,1]$, sedemikian sehingga $0 \leq f_n(x) \leq 1$, dan $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$, tetapi barisan tersebut tidak konvergen pada $[0,1]$.

6. Jika $\{a_n\}$ barisan dengan $a_{n+1} = a_n + \frac{(2-a\ )}{(2a\ +1)}$ untuk setiap n, maka $\lim_{n\to\infty} a_n =$ ......

7. Diketahui fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ kontinu. Jika $f(x)$ rasional, untuk setiap $x \in [0,1]$, dan $f(0) = 0$, maka nilai $f(\frac{\sqrt{2}}{4}) =$ ....

8. Contoh fungsi f dan g yang kontinu seragam pada interval I, tetapi hasil-kali keduanya tidak kontinu seragam pada I adalah ....

9. Diketahui $I \subseteq \mathbb{R}$ interval dan $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi. Jika c titik interior (*interior point*) I dan untuk setiap $x, y \in I$, demgan $x < y$, berlaku $f(x) \geq f(y)$, maka $\lim_{x\to c}\ f(x) =$ ....

10. Jika $f''(x) + p(x)f(x) = 0$ dan $g''(x) + p(x)g(x) = 0$, untuk setiap $x \in (a,b)$, maka $W = f'g - fg' =$ .... pada (a,b).

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

BAGIAN KEDUA

1. Diketahui himpunan $E \subset \mathbb{R}$ tertutup dan fungsi $f : E \to \mathbb{R}$ kontinu. Jika $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam E, tunjukkan terdapat $c \in E$, dengan $\{f(x_n)\}$ konvergen ke $f(c)$.

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

2. Jika fungsi $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ kontinu dan terbatas, tunjukkan bahwa fungsi

$$g : (0,1) \to \mathbb{R},$$

dengan $g(x) = x(1-x)f(x)$, kontinu seragam.

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

3. Jika fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terdiferensial dan terdapat $c \in \mathbb{R}$ dengan $\lim_{x\to\infty} f'(x) = c$, tunjukkan bahwa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c.$$