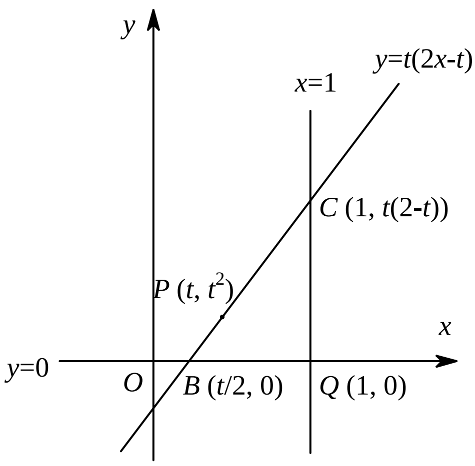
2013 中国女子数学奥林匹克

第一天

2013 年 8 月 12 日　上午 8:00 ~ 12:00

宁波　浙江省镇海中学

1．设 A 是平面直角坐标系上三条直线 $x=1$，$y=0$ 和 $y=t(2x-t)$ 围成的闭区域，其中 $0<t<1$．证明：在区域 A 内，以 $P(t,t^2)$，$Q(1,0)$ 为其中两个顶点的三角形的面积不超过 $\frac{1}{4}$．



解：易知这三条直线围成的闭区域是一个三角形的内部与边界，此三角形的三个顶点分别为 $B(\frac{t}{2},0)$，$Q(1,0)$，$C(1,t(2-t))$．

在三角形 BQC 内任取一点 X，则三角形 PQX 的面积等于 PQ 乘以 X 到 PQ 距离的一半，故当 X 到 PQ 距离最大，即 X 取到 B 点或 C 点时，三角形 PQX 的面积最大.

三角形 PQB 的面积为

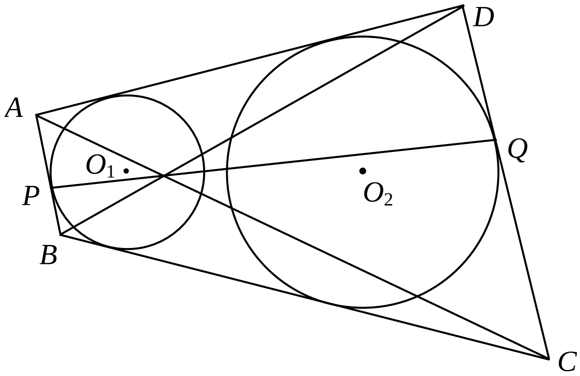
$$\frac{1}{2}(1-\frac{t}{2})t^2=\frac{1}{4}(2-t)t^2\le\frac{1}{4}(2-t)t\le\frac{1}{4}(\frac{2-t+t}{2})^2=\frac{1}{4};$$

三角形 PQC 的面积为

$$\frac{1}{2}(1-t)(2t-t^2)=\frac{1}{4}2t(1-t)(2-t)\le\frac{1}{4}(\frac{2t+1-t+2-t}{3})^3=\frac{1}{4}.$$

因此在区域 A 内，以 P,Q 为其中两个顶点的三角形的面积不超过 $\frac{1}{4}$，证毕.

2．如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AB//CD$，$\odot O_1$ 与 DA,AB,BC 三边相切，$\odot O_2$ 与 BC,CD,DA 三边相切．设 P 是$\odot O_1$与边 AB 的切点，Q 是$\odot O_2$与边 CD 的切点．证明：AC,BD,PQ 三线共点．



证明：设直线 AC,BD 的交点为 R，连接 $O_1A,O_1B,O_1P,O_2C,O_2D,O_2Q,PR,QR$．

由于 BA,BC 是$\odot O_1$ 的切线，故

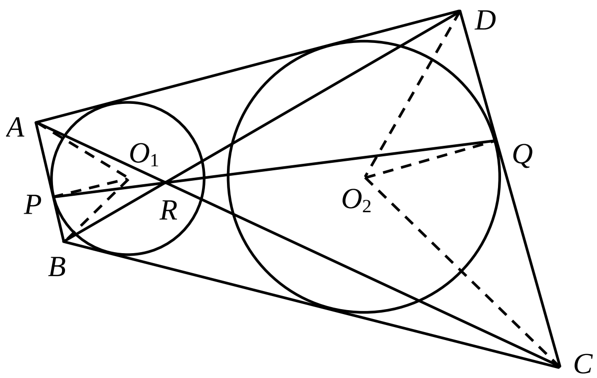
$$\angle PBO_1=\angle CBO_1=\frac{1}{2}\angle ABC.$$

同理

$$\angle QCO_2=\frac{1}{2}\angle BCD.$$

由 $AB//CD$ 知 $\angle ABC+\angle BCD=180°$，因此 $\angle PBO_1+\angle QCO_2=90°$，故 $Rt\Delta O_1BP$ 与 $Rt\Delta CO_2Q$ 相似，我们有

$$\frac{O_1P}{BP}=\frac{CQ}{O_2Q}.$$



同理有

$$\frac{AP}{O_1P}=\frac{O_2Q}{DQ}.$$

两式相乘得

$$\frac{AP}{BP}=\frac{CQ}{DQ}.$$

再由等比定理知 $\dfrac{AP}{AP+BP}=\dfrac{CQ}{CQ+DQ}$，即

$$\frac{AP}{AB}=\frac{CQ}{CD}.$$

由 $AB//CD$ 知 ΔABR 与 ΔCDR 相似，故

$$\frac{AR}{AB}=\frac{CR}{CD}.$$

再与 $\frac{AP}{AB}=\frac{CQ}{CD}$ 比较得

$$\frac{AR}{AP}=\frac{CR}{CQ}.$$

又由于 $\angle PAR=\angle QCR$，故 ΔPAR 与 ΔQCR 相似，因此

$$\angle PRA=\angle QRC.$$

所以 P,R,Q 三点共线，即 AC,BD,PQ 三线共点，证毕.

3．在 m 个女孩和 n 个男孩组成的群体中，任意两人要么相互认识，要么互不认识．对任意两个男孩和两个女孩，其中至少有一个男孩与一个女孩互不认识．求证：相互认识的男女孩对的个数不超过 $m+\frac{n(n-1)}{2}$.

证明：由已知条件，对任意两个男孩，至多有一个公共认识的女孩．考虑恰好认识 i 个男孩的女孩，记这些女孩的人数为 x_i ，$1\le i\le n$ ．故

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=m .$$

计算上述两男一女三人组的个数，则有

$$\sum_{i\ge 2}\frac{i(i-1)}{2}x_i\le\frac{n(n-1)}{2} ,$$

相识的男女孩对的个数为

$$\sum_{i=1}^{n}ix_i=m+\sum_{i=2}^{n}(i-1)x_i\le m+\sum_{i=2}^{n}\frac{i(i-1)}{2}x_i\le m+\frac{n(n-1)}{2} .$$

4．求同时满足下列两个条件的多项式 $f(x)=ax^3+bx$ 的个数：

（1） $a,b\in\{1,2,\cdots,2013\}$；

（2） $f(1),f(2),\cdots,f(2013)$ 中任意两数之差不是 2013 的倍数．

解答：易知素因数分解 $2013=3\times 11\times 61$．记 $p_1=3,p_2=11,p_3=61,$ 对 $a,b\in\{1,2,\cdots,2013\}$，设 a 除以 p_i 的余数是 a_i，b 除以 p_i 的余数是 b_i ($i=1,2,3$)．由中国剩余定理，(a,b) 与 $(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3)$ 一一对应．令 $f_i(x)=a_ix^3+b_ix$，$i=1,2,3$．我们称满足 $f(0),f(1),\cdots,f(n-1)$ 除以 n 的余数互不相同的多项式为“模 n 的好多项式”．

若 $f(x)=ax^3+bx$ 不是模 2013 的好多项式，则存在 $x_1\not\equiv x_2 \pmod{2013}$ 使得 $f(x_1)\equiv f(x_2)\pmod{2013}$．设 $x_1\not\equiv x_2 \pmod{p_i}$，取 u_1,u_2 分别是 x_1,x_2 除以 p_i 的余数，则 $u_1\not\equiv u_2\pmod{p_i}$ 且 $f_i(u_1)\equiv f_i(u_2)\pmod{p_i}$，故 $f_i(x)$ 不是模 p_i 的好多项式．

若 $f(x)=ax^3+bx$ 是模 2013 的好多项式，则每个 $f_i(x)$ 是模 p_i 的好多项式，理由如下：对任意不同的 $r_1,r_2\in\{0,1,\cdots,p_i-1\}$，存在 $x_1,x_2\in\{1,2,\cdots,2013\}$ 使得 $x_1\equiv x_2 (\bmod \dfrac{2013}{p_i})$ 且 $x_1\equiv r_1,x_2\equiv r_2\pmod{p_i}$，因为 $f(x_1)\not\equiv f(x_2)\pmod{2013}$，而 $f(x_1)\equiv f(x_2)(\bmod \dfrac{2013}{p_i})$，所以 $f(r_1)\not\equiv f(r_2)\pmod{p_i}$，结论成立．

因此，我们的问题转化为求模 p_i 的好多项式 $f_i(x)$ 的个数．

对于 $p_1=3$，由 Fermat 小定理，$f_1(x)\equiv a_1x+b_1x\equiv(a_1+b_1)x\pmod 3$ 是好多项式等价于 a_1+b_1 不是 3 的倍数，这样的 $f_1(x)$ 共有 6 个．

对 $i=2,3$，若 $f_i(x)$ 是模 p_i 好多项式，则对任意 u 和 $v\not\equiv 0\pmod{p_i}$，$f_i(u+v)\not\equiv f_i(u-v)\pmod{p_i}$，即 p_i 不整除 $f_i(u+v)-f_i(u-v)=2v[a_i(3u^2+v^2)+b_i]$。若 $a_i\neq 0$，集合 $A=\{3a_iu^2\mid u=0,1,\cdots,\frac{p_i-1}{2}\}$ 与 $B=\{(-b_i-a_iv^2)\mid v=1,2,\cdots,\frac{p_i-1}{2}\}$，中的数模 p_i 的余数不重叠．显然 A，B 内部的数模 p_i 互不同余，并且 $|A|+|B|=p_i$，这样 $A\cup B$ 的 p_i 个元素的余数是 $0,1,\cdots,p_i-1$ 的排列，因而它们的和是 p_i 的倍数，即

$$\sum_{u=0}^{\frac{p_i-1}{2}}3a_iu^2+\sum_{v=1}^{\frac{p_i-1}{2}}(-b_i-a_iv^2)\equiv 0\pmod{p_i}.$$

$1^2+2^2+\cdots+(\frac{p_i-1}{2})^2=\frac{1}{6}\cdot\frac{p_i-1}{2}\cdot\frac{p_i+1}{2}\cdot p_i$ 是 p_i 的倍数，导致 $-\frac{p_i-1}{2}\cdot b_i$ 也是 p_i 的倍数，这样 b_i 是 p_i 的倍数，即 a_i,b_i 中至少有一个是 0，并且显然不能同时为 0.

若 $a_i=0,b_i\neq 0$，则 $f_i(x)=b_i x$ 显然是好多项式．这样的好多项式有 p_i-1 个.

若 $a_i\neq 0,b_i=0$，则 $f_i(x)=a_i x^3$.

对 $p_2=11$，由费马小定理 $(x^3)^7=x^{21}\equiv x(\bmod 11)$，故对于 $x_1\neq x_2(\bmod 11)$，$x_1{}^3\neq x_2{}^3(\bmod 11)$，$f_2(x)=a_2x^3$ 是好多项式．这样的共有 10 个.

对 $p_3=61$，由于 $4^3=64\equiv 125=5^3(\bmod 61)$，所以 $f_3(x)=a_3x^3$ 不是好多项式.

所以，总的个数是 $6\times(10+10)\times 60=7200$.

2013 中国女子数学奥林匹克

第二天

2013 年 8 月 13 日　上午 8:00 ~ 12:00

宁波　浙江省镇海中学

5．给定正实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$．证明：存在正实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，满足$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$，且对任何满足$\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=1$的正实数$y_1,y_2,\cdots,y_n$，均有$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_ix_i}{x_i+y_i}\ge\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$．

证明：令$x_i=\frac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$．将$x_i$代入不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ix_i}{x_i+y_i}=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+y_i}.$$

对任何正实数$y_1,y_2,\cdots,y_n$，$\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=1$，由柯西不等式可知

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+y_i}=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+y_i}\ge(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2=1,$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ix_i}{x_i+y_i}=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+y_i}\ge\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i,$$

证毕．

6．设集合 S 是 $\{0,1,2,\cdots,98\}$ 的 m 元子集，$m\geq 3$，满足对任意 $x,y\in S$，均存在 $z\in S$，使得 $x+y\equiv 2z \pmod{99}$．求 m 的所有可能值．

解答：设 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}$． 由于 $S'=\{0,s_2-s_1,\cdots,s_m-s_1\}$ 也满足题设，故不妨设 $0\in S$．

由题设可知，对任意 $x,y\in S$，$50(x+y)\equiv z \pmod{99}\in S$．特别，对任意 $x\in S$，$50x\in S$．由 50 与 99 互素，根据抽屉原理或根据 Euler 定理，存在正整数 k 使得

$$50^k\equiv 1 \pmod{99},$$

从而

$$x+y\equiv 50^k(x+y) \pmod{99}\in S.$$

设 $d=\gcd(99,s_1,s_2,\cdots,s_m)$，则由上面的结论及 Bezout 定理，知

$$d\in S,$$

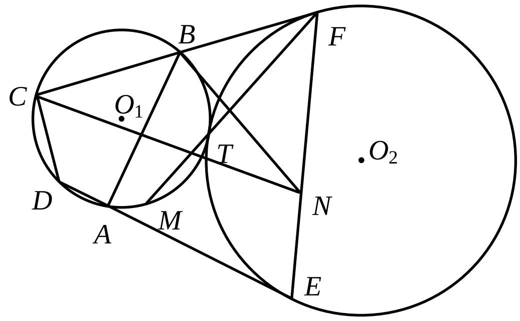
从而

$$S=\{0,d,2d,\cdots\}.$$

对 99 的任意正因子 $d<99$，上述集合 S 满足题设．故 m 的所有可能值为

$$3,9,11,33,99.$$

7．如图所示，⊙O_1与⊙O_2外切于点 T，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O_1，直线 DA、CB 分别切⊙O_2于点 E、F．直线 BN 平分∠ABF 并与线段 EF 交于点 N．直线 FT 交 $\overset{\frown}{AT}$（不包含点 B 的弧）内于点 M．求证：点 M 为△BCN 的外心．

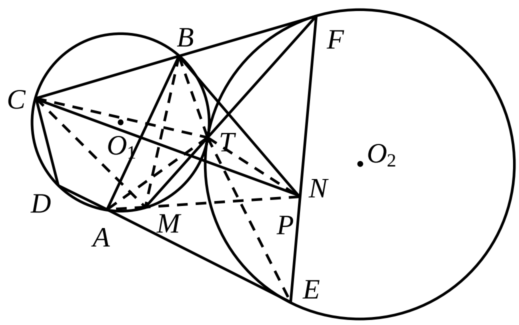


证明：设 AM 的延长线交 EF 于点 P．连接 AT、BM、BP、BT、CM、CT、ET、TP．

由 BF 与⊙O_2相切于 F 点，可得∠BFT=∠FET．由⊙O_1与⊙O_2外切于点 T，可得∠MBT=∠FET．因此∠MBT=∠BFM．于是△MBT 与△MFB 相似，从而 $MB^2=MT\cdot MF$．同理可得 $MC^2=MT\cdot MF$．

又由⊙O_1与⊙O_2外切于点 T，可得∠MAT=∠FET．因此 A、E、P、T 四点共圆，从而∠APT=∠AET．由 AE 与⊙O_2 相切于 E 点，可得∠AET=∠EFT．因此∠MPT=∠PFM．于是△MPT 与△MFP 相似，从而 $MP^2=MT\cdot MF$．

由前面可得 MC=MB=MP．从而点 M 是△BCP 外接圆的圆心．于是∠FBP=$\frac{1}{2}$∠CMP．而∠CMP=∠CDA=∠ABF．由题意得∠FBN=$\frac{1}{2}$∠ABF．从而∠FBN=∠FBP，即点 P 与 N 重合．证毕．



8．设 $n\ge 4$ 是偶数．在正 n 边形的顶点处任意方式标上 n 个互不相同的实数，从某条边起按顺时针方向依次将边记为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$．一条边称为“正边”，若其两个端点所标之数按顺时针方向是递增的．两条不同的边构成的无序边对 $\{e_i, e_j\}$ 称为“交错”的，若 $2\,|\,(i+j)$，且将它们四个端点上所标数按递增顺序记为 $a<b<c<d$ 后，a,c 是其中一条边的两端点所标之数．求证：交错的边对的个数与正边的个数具有不同的奇偶性．

证法一：不妨设所标的 n 个实数即为 $1,2,\cdots,n$，设 A 是交错的边对个数，B 是正边个数，$S=A+B$．我们证明将标数 i 和 $i+1$ 交换后 S 的奇偶性不改变．讨论两种情形．

情形一：标有 i 和 $i+1$ 的顶点相邻，为边 e_k 的两个端点，交换 i 与 $i+1$ 后，e_k 的正负性改变(我们把不是正边的边称为负边)，其余边的正负性不改变，故 B 改变奇偶性．另一方面除边对 $\{e_{k-1}, e_{k+1}\}$ (这里下标需按模 n 理解)外，其余下标和为偶数的边对仍保持原先的交错性或不交错性，而 $\{e_{k-1}, e_{k+1}\}$ 会改变其交错性，即若 $\{a,i\},\{b,i+1\}$ 是交错的(或非交错的)，则交换 i 和 $i+1$ 后，$\{a,i+1\},\{b,i\}$ 是非交错的或(交错的)．这是因为若 $\{a,i\},\{b,i+1\}$ 是交错的，则或者 $b<i<i+1<a$，或者 $i<i+1<a<b$，或者 $a<b<i<i+1$，不论何种情况，$\{a,i+1\},\{b,i\}$ 是非交错的．若 $\{a,i\},\{b,i+1\}$ 是非交错的，则或者 $a<i<i+1<b$，或者 $b<a<i<i+1$，或者 $i<i+1<b<a$，不论何种情况，$\{a,i+1\},\{b,i\}$ 是交错的．这样 A 改变奇偶性，S 不改变奇偶性．

情形二：标有 i 和 $i+1$ 的顶点不相邻，假设分别为边 e_j, e_{j+1} 和 e_k, e_{k+1} 的顶点，交换 i 与 $i+1$ 后每条边的正负性不改变，即 B 不改变．不同时包含 i 与 $i+1$ 的边对的交错性也不改变，同时包含 i 与 $i+1$ 的边对，且下标和为偶数的恰有两对，由上面的讨论知这两对边的交错性改变，故 A 的奇偶性不改变，S 的奇偶性也不改变．

现通过上面的操作使得标数方式为从某个顶点开始顺时针依次标数为 $1,2,\cdots,n$．这是可以做到的，设某个顶点的标数为 1，若其顺时针下一个顶点上不是 2，为 $i>2$，则交换 $(i,i-1),(i-1,i-2),\cdots,(3,2)$，则 2 在 1 的顺时针下一个顶点上，类似方法可使得顺时针依次标数为 $1,2,\cdots,n$．由上述讨论知 S 不改变奇偶性，此时 $B=n-1$，$A=0$，故 S 为奇数．因此初始时 S 也为奇数，即 A 和 B 具有不同奇偶性．

证法二：从某个顶点起顺时针方向将顶点上的数依次记为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，不妨设边 e_i 的两端顶点的标数为 x_i, x_{i+1}，$i=1,2,\cdots,n$，这里记 $x_{n+1}=x_1$．易知 e_i 为正边当且仅当

$x_{i+1}-x_i>0$. 设交错边对个数为 A，正边个数为 B. 记

$$\beta=\prod_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i),$$

由于 n 是偶数，β 的符号即为 $(-1)^B$.

另一方面 $\{e_i,e_j\}$ 是交错边对当且仅当 $2\nmid i+j$，并且

$$(x_j-x_i)(x_j-x_{i+1})(x_{j+1}-x_i)(x_{j+1}-x_{i+1})<0.$$

将上式左边记为 $f(e_i,e_j)$，显然 $f(e_i,e_j)=f(e_j,e_i)$. 设边 e_i 的两端数为 a,c ，$a<c$，边 e_j 的两端数为 b,d ，$b<d$，若 e_i,e_j 是交错边对，则 $a<b<c<d$，或者 $b<a<d<c$，不论何种情形都有

$$f(e_i,e_j)=(b-a)(b-c)(d-a)(d-c)<0.$$

若 e_i,e_j 不是交错边对，则要么 $b<a<c<d$，要么 $a<c<b<d$，要么 $b<d<a<c$，要么 $a<b<d<c$，不论何种情形都有

$$f(e_i,e_j)=(b-a)(b-c)(d-a)(d-c)>0.$$

再记

$$\alpha=\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ 2\nmid i+j}}(x_j-x_i)(x_j-x_{i+1})(x_{j+1}-x_i)(x_{j+1}-x_{i+1})=\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ 2\nmid i+j}}f(e_i,e_j),$$

则 α 的符号为 $(-1)^A$. 下面计算 $\alpha\beta$ 的符号. 对 $1\le i<j\le n$，考虑 x_j-x_i 分别在 α 和 β 中的出现次数和符号. 分几种情况讨论.

情形一：$j-i=1$，x_j-x_i 在 β 中出现一次，符号为正，在 α 中也出现一次，若 $i>1$，则出现在 $f(e_{i-1},e_{i+1})$ 中，符号为正，若 $i=1$，x_2-x_1 出现在 $f(e_2,e_n)$ 中，符号为负. 这部分数乘积的符号为负.

情形二：$2\le j-i<n-1$，则 x_j-x_i 在 β 中不出现，在 α 中出现两次，$(i-1,j-1)$，$(i-1,j)$ 中恰有一对是同奇偶性的，$(i,j-1)$，(i,j) 中恰有一对是同奇偶性的. x_j-x_i 出现的符号都是正的，除了 $i=1$ 时，出现在 $f(e_{j-1},e_n)$ 或 $f(e_j,e_n)$ 中符号是负的. 对 $i=1,j=3,4,\cdots,n-1$ 各产生一个负号，这部分数乘积的符号为 $(-1)^{n-3}=-1$.

情形三：$i=1,j=n$，则 x_n-x_1 在 β 中出现一次，为负号，在 α 中也出现一次，出现在 $f(e_{n-1},e_1)$ 中，为正号. 这部分数乘积的符号为负.

综上所述，$\alpha\beta$ 的符号为负，即 $A+B$ 为奇数，结论得证.