

Olimpiade Matematika untuk Mahasiswa 2006

ANALISIS REAL

15 MEI 2006

WAKTU: 90 MENIT

BAGIAN PERTAMA

1. Supremum dan infimum dari himpunan $A = \{\frac{m}{n} + \frac{8n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$, \mathbb{N} = himpunan semua bilangan asli, adalah...

2. Berapa banyak akar dari persamaan $ae^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, untuk $a > 0$?

3. Misalkan f terdiferensialkan secara kontinu di $x = a$ dan $f(a) \neq 0$. Tentukan nilai dari

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(a + 1/n)}{f(a)} \right]^n.$$

4. Untuk nilai p berapakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)^p$ konvergen?

5. Misalkan fungsi-fungsi f dan g kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensialkan pada (a, b) . Jika $f'(x) = g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ dan $g(a) = a, g(b) = b$, tentukan nilai $|f(b) - f(a)|$.

6. Misalkan $p_n(x)$ polinom MacLaurin untuk fungsi $f(x) = e^x$, berapakah derajat polinom (n) terkecil sehingga $|e^x - p_n(x)| \leq 10^{-2}$, untuk $-1 \leq x \leq 1$?

7. Hitunglah $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{\cos x} dx$.

8. Diberikan fungsi f terdiferensialkan pada \mathbb{R} . Jika $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{a}{x} + b\right)$ ada dan tak nol,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[f\left(\frac{a}{x} + b\right) - \frac{a}{x} f'\left(\frac{a}{x} + b\right) \right] = \alpha$$

berapakah nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan barisan (x_n) dengan $0 < a = x_1 < x_2 = b$ dan

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

tinjau barisan (r_n) dengan $r_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}, n = 1, 2, 3, \dots$

- (a) Tunjukkan bahwa $1 < r_n < 2$ untuk $n = 2, 3, 4, \dots$
- (b) Selidikilah kekonvergenan (r_n) .
2. Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terbatas. *Variasi total* dari f pada $[a, b]$, ditulis $V_f[a, b]$, didefinisikan sebagai

$$V_f[a, b] := \sup \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

dengan nilai supremum diambil atas semua partisi $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ dari $[a, b]$. Di sini $V_f[a, b]$ dapat bernilai ∞ .

- (a) Hitung/taksir $V_f[0, 1]$ untuk $f(x) := x \cos(1/x)$.
- (b) Hitung/taksir $V_g[0, 1]$ untuk $g(x) := x^2 \cos(1/x)$.
3. Diberikan barisan fungsi real (f_n) , $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, dengan

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- (a) Buktikan (f_n) tidak konvergen seragam pada $[0, 2]$.
- (b) Tentukan $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in [0, 2]$.