ANALISIS REAL I

BAB I

BILANGAN REAL

Pada bab ini dibahas sifat-sifat penting dari sistem bilangan real $\mathbb{R}$, seperti sifat-sifat aljabar, urutan, dan ketaksamaan. Selanjutnya, akan diberikan beberapa pengertian seperti bilangan rasional, harga mutlak, himpunan terbuka, dan pengertian lainnya yang berkaitan dengan bilangan real.

1.1 Sifat-sifat Aljabar dan Urutan dalam $\mathbb{R}$

Sebelum menjelaskan tentang sifat-sifat $\mathbb{R}$, diberikan terlebih dahulu tentang struktur aljabar dari sistem bilangan real. Akan diberikan penjelasan singkat mengenai sifat-sifat dasar dari penjumlahan dan perkalian, sifat-sifat aljabar lain yang dapat diturunkan dalam beberapa aksioma dan teorema. Dalam terminologi aljabar abstrak, sistem bilangan real membentuk lapangan (field) terhadap operasi biner penjumlahan dan perkalian biasa.

Sifat-sifat Aljabar $\mathbb{R}$

Pada himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ terdapat dua operasi biner, dinotasikan dengan " + " dan "." yang disebut dengan penjumlahan (addition) dan perkalian (multiplication). Operasi biner tersebut memenuhi sifat-sifat berikut:

(A1) $a + b = b + a$ untuk semua $a, b \in \mathbb{R}$ (sifat komutatif penjumlahan)

(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk semua $a, b, c \in \mathbb{R}$ (sifat asosiatif penjumlahan)

(A3) Terdapat $0 \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $0 + a = a$ dan $a + 0 = a$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$ (eksistensi elemen nol)

(A4) Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ terdapat $-a \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a + (-a) = 0$ dan $(-a) + a = 0$ (eksistensi elemen negatif atau invers penjumlahan)

(M1) $a. b = b. a$ untuk semua (sifat komutatif perkalian)

(M2) $(a. b). c = a. (b. c)$ntuk semua $a, b, c \in \mathbb{R}$ (sifat asosiatif perkalian)

(M3) terdapat $1 \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $1 . a = a$ dan $a .1 = a$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$ (eksistensi elemen unit 1)

(M4) untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ terdapat $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a . \left(\frac{1}{a}\right) = 1$ dan $\left(\frac{1}{a}\right). a = 1$ (eksistensi invers perkalian)

(D) $a . (b + c) = (a . b) + (a . c)$ dan $(b + c) . a = (b . a) + (c . a)$ untuk semua $a, b, c \in \mathbb{R}$ (sifat distributif perkalian atas penjumlahan)

Sifat-sifat di atas telah umum diketahui. Sifat (A1)-(A4) menjelaskan sifat penjumlahan, sifat (M1)-(M4) menjelaskan sifat perkalian, dan sifat terakhir menggabungkan kedua operasi.

Selanjutnya, diberikan beberapa teorema tentang elemen 0 dan 1 yang telah diberikan pada sifat (A3) dan (M3) di atas. Juga akan ditunjukkan bahwa perkalian dengan 0 akan selalu menghasilkan 0.

Teorema 1.1.1.

(a) $Jika\ z, a \in \mathbb{R}\ dengan\ z + a = a, maka\ z = 0.$

(b) $Jika\ u\ dan\ b \neq 0\ elemen\ \mathbb{R}\ dengan\ u. b = b, maka\ u = 1.$

(c) $JIka\ a \in \mathbb{R}, maka\ a\ .0 = 0$

Bukti.

(a) Menggunakan aksioma (A3), (A4), (A2), asumsi $z + a = a$, dan (A4), diperoleh $z = z + 0$

$= z + (a + (-a)$

$= (z + a) + (-a)$

$= a + (-a)$

$= 0$

(b) Menggunakan aksioma (M3), (M4), (M2), asumsi $u\ .b = b$, dan (M4), diperoleh

$u = u\ .1$

$= u\ .\left(b\ .\left(\frac{1}{b}\right)\right)$

$= (u\ .b).\left(\frac{1}{b}\right)$

$= b\ .\left(\frac{1}{b}\right)$

$= 1$

(c) Karena $a + a\ .0 = a\ .1 + a.0 = a\ .(1 + 0) = a.1 = a$, maka $a\ .0 = 0$

Dengan demikian, maka teorema terbukti.

Teorema 1.1.2. $Jika\ a \in \mathbb{R}, maka$

(a) $(-1).a = -a$

(b) $-(-a) = a$

(c) $(-1).(-1) = 1$

Selanjutnya diberikan dua sifat penting dari operasi perkalian, yaitu sifat ketunggalan elemen inversnya dan bahwa perkalian dua bilangan itu hasilnya nol apabila salah satu faktornya adalah nol.

Teorema 1.1.3.

(a) $Jika\ a + b = 0,\ maka\ b = -a$

(b) $Jika\ a \neq 0\ dan\ b \in \mathbb{R}\ sedemikian\ hingga\ a.b = 1, maka\ b = \frac{1}{a}$

(c) $Jika\ a.b = 0,\ maka\ a = 0\ atau\ b = 0$

Bukti.

(a) Karena $a + b = 0,\ maka$

$$a + b \Leftrightarrow (-a) + (a + b) = (-a) + 0$$

$$\Leftrightarrow ((-a) + a) + b = -a \qquad \text{(A2 dan A3)}$$

$$\Leftrightarrow 0 + b = -a \qquad \text{(A4)}$$

$$\Leftrightarrow b = -a \qquad \text{(A3)}$$

(b) Karena $a.b = 1$, maka

$$a.b = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)(a.b) = \frac{1}{a}.1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}.a\right)(b) = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow 1.b = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{a}$$

(c) Diketahui $a.b = 0$, maka

$$a.b = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)(a.b) = \frac{1}{a}.0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}.a\right)(b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}.a\right)(b) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1.b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 0$$

Dengan cara yang sama, kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{b}$, maka diperoleh $a = 0$.

Dengan demikian teorema terbukti.

Teorema tersebut diatas menjelaskan beberapa sifat aljabar sederhana dari system bilangan real. beberapa akibat dari teorema tersebut diberikan sebagai bahan latihan soal di bagian akhir subbab ini.

Operasi **pengurangan** (substraction) didefinisikan dengan $a - b = a + (-b)$ untuk $a, b \in \mathbb{R}$. Sama halnya dengan operasi **pembagian** (division), untuk $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $b \neq 0$ didefinisikan $\frac{a}{b} = a.\left(\frac{1}{b}\right)$.

Untuk selanjutnya, $a.b$ cukup dituliskan dengan ab, dan penulisan a^2 untuk aa, a^3 untuk $(a^2)a$, dan secara umum didefinisikan $a^{n+1} = (a^n)a$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Lebih lanjut , $a' = a$, dan jika $a \neq 0$, maka dapat ditulis $a^0 = 1$ dan a^{-1} untuk $\frac{1}{a}$, dan jika $n \in \mathbb{N}$, dapat ditulis a^{-n} untuk $\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Bilangan Rasional dan Irrasional

Telah diketahui bahwa himpunan $\mathbb{N}$ dan $\mathbb{Z}$ adalah subset dari $\mathbb{R}$. Elemen $\mathbb{R}$ yang dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{b}{a}$ dimana $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $a \neq 0$ disebut dengan **bilangan rasional** (rasional numbers). Himpunan semua bilangan rasional di $\mathbb{R}$ dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$. Dapat ditunjukkan bahwa penjumlahan dan perkalian dua bilangan rasional adalah bilangan rasional. Lebih lanjut, sifat-sifat lapangan juga berlaku untuk $\mathbb{Q}$.

Akan tetapi, tidak semua elemen $\mathbb{R}$ merupakan elemen $\mathbb{Q}$. Seperti $\sqrt{2}$ yang tidak dapat dinyatakan kedalam bentuk $\frac{b}{a}$. Elemen $\mathbb{R}$ yang bukan elemen $\mathbb{Q}$ disebut **bilangan Irrasional** (irrasional numbers).

Akan ditunjukkan bahwa tidak terdapat bilangan rasional yang kuadratnya adalah 2. Untuk membuktikannya digunakan istilah genap dan ganjil. Suatu bilangan asli disebut **genap** apabila bilangan itu mempunyai bentuk $2n$ untuk suatu $n \in N$, dan disebut **ganjil** apabila bilangan itu mempunyai bentuk $2n - 1$ untuk suatu $n \in N$.

Teorema 1.1.4. *tidak ada elemen $r \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $r^2 = 2$.*

Bukti. Andaikan ada r Є Q sedemikian hingga $r^2 = 2$. Karena r Є Q, maka r dapat dituliskan sebagai $\frac{p}{q}$ dengan p dan q tidak mempunyai faktor berserikat selain 1, sehingga diperoleh $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ atau $p^2 = 2q^2$. Karena $2q^2$ genap, maka p^2 genap. Akibatnya p juga genap, sebab jika ganjil, maka $p = 2m - 1$ untuk suatu m Є N, atau $p^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1$ yang berarti bahwa p^2 ganjil. Jadi, p haruslah

genap. Karena *p* genap, maka *p*= *2k* untuk suatu k Є N, sehingga $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Di lain pihak diketahui $p^2 = 2q^2$ dan *p* genap, akibatnya q ganjil sebab jika q genap, maka faktor berserikat *p* dan *q* bukan 1. Jadi, *q* haruslah ganjil. Sehingga diperoleh $p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$ yang berarti *q* genap. Menghasilkan kontradiksi bahwa *q* ganjil. Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah tidak ada r Є Q sedemikian hingga
$r^2 = 2$.

Sifat-sifat Urutan pada R

Sifat urutan menjelaskan tentang kepositifan (*positivity*) dan ketaksamaan (*inequalities*) di tak kosong antara bilangan-bilangan real.

Ada subset P $\subset$ R, yang disebut dengan **himpunan bilangan-bilangan real positif tegas,** yang memenuhi sifat-sifat berikut:

i. Jika a, b Є P, maka a + b Є P
ii. Jika a, b Є P, maka ab Є P
iii. Jika a Є P, maka memenuhi tepat satu kondisi berikut:
   a Є P, a = 0, -a Є P

Sifat pertama dan kedua pada teorema di atas menjelaskan P tentang sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Sifat yang ketiga R ke dalam tiga jenis elemen yang berbeda. Hal ini menjelaskan bahwa himpunan {-a: a Є P} dari bilangan real **negative** tidak mempunyai elemen yang sama dengan himpunan bilangan real positif. Lebih lanjut, R merupakan gabungan tiga himpunan saling asing tersebut, yaitu

R = P $\cup$ {-a: a Є P} $\cup$ {0}

Definisi 1.1.5.

i. Jika a Є P , ditulis a > 0, artinya a adalah bilangan real **positif**
ii. Jika a Є P $\cup$ {0}, ditulis a $\geq$ 0, artinya a adalah bilangan real **nonnegative**.
iii. Jika –a Є P, ditulis a < 0, artinya a adalah bilangan real **negative**.
iv. Jika –a Є P $\cup$ {0}, ditulis a $\leq$ 0, artinya a adalah bilangan real **nonpositif**.

Definisi1.1.6. Diberikan a, b Є R

a. Jika a – b Є P, maka ditulis a > b atau b < a
b. Jika a – b Є P $\cup$ {0}, maka ditulis a $\geq$ b atau b $\leq$ a

Sifat Trikotomi di atas berakibat bahwa untuk a, b Є R memenuhi tepat satu kondisi berikut:

a > b, a = b a < b.

Selanjutnya, jika a $\leq$ b dan b $\leq$ a, maka a = b. jika a < b < c, maka artinya bahwa a < b dan b < c.

Teorema 1.1.7. Diberikan sebarang a, b, c Є R

a. Jika a > b dan b > c, maka a> c

b. Jika a > b, maka a + c > b + c

c. Jika a > b dan c > 0, maka ca > cb

Jika a > b dan c < 0, maka ca < cb

d. Jika a > 0, maka $\frac{1}{a} > 0$

Jika a < 0, maka $\frac{1}{a} < 0$

Bukti.

a. Diketahui a > b dan b > c, a, b, c Є R. Karena a > b, maka a – b Є P. Karena b > c, maka b – c Є P. Menurut sifat urutan, maka a + b Є P, sehingga diperoleh

(a – b) + (b + c) ⇔ a – b + b – c Є P

⇔ (a – c) + (- b + b) Є P

⇔ (a – c) + 0 Є P

⇔ a – c Є P

⇔ a > c

b. Jika a – b Є P, maka (a + c) – (b – c) = a – b Є P. Sehingga dipeoleh bahwa a + c > b + c.

c. Jika a – b dan c Є P, maka ca – cb = c (a – b) Є P. Akibatnya ca > cb untuk c > 0. Gunakan langkah yang sama untuk c < 0

d. Cobalah anda buktikan sendiri

Oleh karena itu, dapat dilihat bahwa bilangan asli juga merupakan bilangan real positif. Sifat ini diperoleh dari sifat dasa urutan, berikut ini diberikan teoremanya.

Teorema 1.1.8

a. Jika a Є R dan a ≠ 0, maka $a^2 > 0$

b. 1 > 0

c. Jika n Є N , maka n > 0

Teorema 1.1.9. Jika a,b Є R dan a <b, maka $a < \frac{a+b}{2} < b$

Bukti. Karena a < b, maka a + a < a + b ⇔ 2a < a + b, diperoleh $a < \frac{(a+b)}{2}$. karena a < b, maka a + b < b + b ⇔ a + b < 2b, diperoleh bahwa $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Dapat ditunjukkan bahwa tidak ada bilangan real positif yang terkecil, sebab jika diberikan a > 0, dan karena $\frac{1}{2} > 0$, maka diperoleh

$$0 < \frac{1}{2}a < a .$$

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa suatu himpunan a $\geq$ 0 adalah sama dengan nol, maka harus ditunjukkan bahwa a selalu lebih kecil dari sebarang bilangan positi yang diberikan.

Teorema 1.1.10. Jika a sedemikian hingga $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka a =0.

Bukti. Andaikan a > 0, maka $a > \frac{a}{2} > 0$. Diambil $\varepsilon_0 = \frac{a}{2}$ (ε_0 bilangan real positif tegas), maka a > ε_0 > 0. Kontradiksi dengan pernyataan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah a = 0.

Perkalian antara dua bilangan positif hasilnya adalah positif. Akan tetapi, hasil perkalian yang positif belum tentu setiap faktornya positif.

Teorema 1.1.11. Jika ab > 0, maka berlaku

i. a > 0 dan b > 0, atau
ii. a < 0 dan b < 0

Akibat 1.1.12. Jika ab < 0, maka berlaku

i. a < 0 dan b > 0, atau
ii. a > 0 dan b < 0

Ketaksamaan (Inequalities)

Selanjutnya, akan ditunjukkan bagaimana sifat urutan dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu ketaksamaan. Perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 1.1.13.

a. Tentukan himpunan A dari bilangan real x sedemikian hingga 2x + 3 $\leq$ 6

   Jawab. Diketahui x Є A dan 2x + 3 $\leq$ 6, maka

   $$2x + 3 \leq 6 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

   Jadi, $A = \left\{ x \in \mathrm{R} : x \leq \frac{3}{2} \right\}$

b. Diberikan B = { x x Є R: x^2 + x > 2}. Tentukan bentuk lain dari B

   Jawab. Diketahui x Є B dan x^2 + x > 2 atau x^2 + x – 2 > 0 atau (x – 1)(x + 2) > 0. Sehingga diperoleh bahwa (i) x – 1 > 0 dan x + 2 > 0, atau (ii) x – 1 < 0 dan x + 2 < 0. Untuk kasus (i) diperoleh bahwa x >1 dan x < - 2, yang berarti x < - 2. Jadi, himpunannya adalah

   B = { x x Є R: x>1} $\cup$ {x Є R: x < -2}

Teorema 1.1.14. Jika a $\geq$ 0 dan b $\geq$ 0, maka

a. $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$
b. $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

1.1.15. Ketaksamaan Bernoulli Jika x > -1, maka $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ untuk semua n Є N.

Bukti. Akan dibuktikan menggunakan induksi.

Untuk $n = 1$, maka

$$(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x \Leftrightarrow 1 + x \geq 1 + x \qquad \text{(pernyataan benar)}$$

Misalkan benar untuk $n = k$, yaitu $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Akan dibuktikan benar untuk $n = k+1$, yaitu :

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) \\ = 1 + kx + x + kx^2 \\ = 1 + (k+1)x + kx^2\end{aligned}$$

Karena $kx^2 \geq 0$, maka $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$, yang berarti benar untuk $n = k+1$.

Jadi, terbukti bahwa $(1+x)^n \geq 1 + nx$ untuk semua $n \in \mathrm{N}$.

1.1.16. Ketaksamaan Cauchy

Jika $n \in \mathrm{N}$ *dan* $a_1, \ldots.., a_n, b_1, \ldots.., b_n \in \mathrm{R}$, *maka*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots.. + a_nb_n)^2 \leq (a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots.. + a_n{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2 + \ldots.. + b_n{}^2)$$

atau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

Selanjutnya, jika tidak semua $b_1 = 0$, *maka* $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i{}^2\right)$ *jika dan hanya jika terdapat* $s \in \mathrm{R}$ *sedemikian hingga* $a_1 = sb_1, a_2 = sb_2, \ldots.., a_n = sb_n$.

Bukti. Didefenisikan fungsi $F : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ sebagai berikut :

$$F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + (a_2 - tb_2)^2 + \ldots.. + (a_n - tb_n)^2, t \in \mathrm{R}$$

Jelas bahwa $F(t) \geq 0$, untuk setiap $t \in \mathrm{R}$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned}F(t) &= (a_1{}^2 - 2ta_1b_1 + t^2b_1{}^2) + (a_2{}^2 - 2ta_2b_2 + t^2b_2{}^2) + \ldots. + (a_n{}^2 - 2ta_nb_n + t^2b_n{}^2) \\ &= (a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots. + a_n{}^2) - 2t(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots. + a_nb_n) + t^2(b_1{}^2 + b_2{}^2 + \ldots. + b_n{}^2) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2\right) - 2t\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right) + t^2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i{}^2\right)\end{aligned}$$

Ingatbahwapersamaan$A + 2Bt + Ct^2 \geq 0$ jika dan hanya jika$(2B)^2 - 4AC \leq 0$, yang berakibat $B^2 \leq AC$.Sehingga diperoleh bahwa

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

Dengandemikianterbukti .

SOAL LATIHAN SUBBAB 1.1

1. Jika$a, b \in \mathbb{R}$,tunjukan bahwa :

a. $-(a+b) = (-a) + (-b)$.

b. $(-a)(-b) = ab$

c. $-\left({}^{a}/_{b}\right) = \frac{-a}{b}$ jika $b \neq 0$.

2. S elesaikanpersamaanberikut.

(a). $2x + 5 = 8$.

(b). $x^2 = 2x$.

3. jika$a \neq 0$ dan $b \neq 0$, tunjukkan bahwa $\frac{1}{(ab)} = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)$

4. Buktikanbahwatidakadabilanganrasional$t$ sedemikian hingga $t^2 = 3$.

5. Buktikanbahwajika$a > 0$, maka $\frac{1}{({}^{1}/_{a})} = a$.

6. Jika, $b \in \mathbb{R}$, tunjukan bahwa $a^2 + b^2 = 0$ jika hanya jika $a = b = 0$

7.Buktikanbahwa$\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, untuk semua $a, b \in \mathbb{R}$.

8. Tunjukanbahwajika$a \in \mathbb{R}$dan , $n \in \mathbb{N}$, maka $a^{m+n} = a^m a^n$ dan $(a^m)^n = a^{mn}$. (Gunakaninduksimatematik).

1.2. NilaiMutlakdanGarisBilangan Real

Dari sifatTrikotomi,dapatditarikkesimpulanbahwajika$a \in$ R dan$a \neq 0$, maka a atau $-a$ merupakan bilangan real positif. Nilai mutlak dari $a \neq 0$ didefinisikan sebagai nilai positif dari dua bilangan tersebut.

Definisi 1.2.1 Nilaimutlak (absolute value) darisuatubilanganreal a, dinotasikan dengan $|a|$, didefinisikansebagai

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jika } a > 0. \\ 0 & \text{jika } a = 0. \\ -a & \text{jika } a < 0. \end{cases}$$

Sebagaicontohnya, |3|= 3 dan |-9|= 9. Dapatdilihatdaridefinisi di atasbahwa$|a| \geq 0$ untuksemua$a \in$ R, dan bahwa $|a| = 0$jikadanhanyajika$a = 0$. Juga bahwa $|-a| = a$ untuksemua$a \in$ R. Berikutinidiberikanbeberapasifatnilaimutlak.

Teorema 1.2.2.

(a) $|ab| = |a||b|$ *untuksemua* $a \in R$.

(b) $|a|^2 = a^2$ *untuksemua* $a \in R$.

(c) *Jika* $c \geq 0$, *maka* $|a| \leq c$ *jikadanhanyajika* $-c \leq a \leq c$.

(d) $-|a| \leq a \leq |a|$ *untuksemua* $a \in R$.

Bukti.

a) Jika $a=b=0$, maka terbukti. Jika $a>0$ dan $b>0$, maka $ab>0$, sehingga $|ab|=ab=|a||b|$. Jika $a>0$ dan $b<0$, maka $ab<0$, sehingga $|ab|=-ab=a(-b)=|a||b|$.

b) (b)Karena $a^2\geq 0$, maka $a^2=|a^2|=|aa|=|a||a|=|a|^2$.

c) (c) Jika $|a|\leq c$, maka $a\leq c$ dan $-a\leq c$ yang berarti $-c\leq a\leq c$. Sebaliknya, jika $-c\leq a\leq c$, maka diperoleh $a\leq c$ dan $-a\leq c$. Jadi, $|a|\leq c$.

d) Gunakan langkah yang sama seperti pada (c) dengan mengambil $c=|a|$.

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang disebut dengan Ketaksamaan Segitiga *(Triangle Inequality)*.

1.2.3. KetaksamaanSegitiga *Jika $a, b\in R$, maka* $|a+b|\leq|a|+|b|$.

Bukti. Dari Teorema 1.2.2(d), diketahui $-|a|\leq a\leq|a|$ dan $-|b|\leq b\leq|b|$. Dengan menjumlahkan kedua ketaksamaan diperoleh

$$-(|a|+|b|)\leq a+b\leq|a|+|b|.$$

Menggunakan Teorema 1.2.2(c) diperoleh bahwa $|a+b|\leq|a|+|b|$.

Akibat 1.2.4 *Jika $a,b\in R$, maka*

(a) $||a|-|b||\leq|a-b|$.

(b) $|a-b|\leq|a|+|b|$.

Bukti.

(a) Tulis $a = a-b+b$ dan masukkan ke dalam Ketaksamaan Segitiga. Sehingga $|a| = |(a-b)+b|\leq|a-b|+|b|$. Kurangkan keduaruas dengan $|b|$, diperoleh $|a|-|b|\leq|a-b|$. Gunakan cara yang sama untuk $b=b-a+a$, diperoleh $-|a-b|\leq|a|-|b|$.Kombinasikan kedua ketaksamaan tersebut, diperoleh

$$-|a-b|\leq|a|-|b|\leq|a-b|.$$

Menggunakan Teorema 1.2.2(c) diperoleh bahwa $||a|-|b||\leq|a-b|$.

(b) Gantilah b pada Ketaksamaan Segitiga dengan $-b$, sehingga diperoleh $|a-b|\leq|a|+|-b|$. Karena $|-b|=b$, makadi peroleh bahwa $|a-b|\leq|a|+|b|$.

Ketaksamaan segitiga di atas dapat diperluas sehingga berlaku untuk sebarang bilangan real yang banyaknya berhingga.

Akibat 1.2.5. *Jika a_1, a_2,....,a_n adalah sebarang bilangan real, maka*

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\ldots.+|a_n|$$

Contoh 1.2.6.

Diberikan fungsi f yang didefinisikan dengan $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ untuk $x \in [2,3]$.

Tentukan konstanta M se demikian hingga $|f(x)| \le M$, untuk setiap $x \in [2,3]$.

Diketahui $|f(x)| = \left|\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1}\right| = \dfrac{|2x^2 - 3x + 1|}{|2x - 1|}$.

$$|2x^2 - 3x + 1| \le |2x^2| + |-3x| + 1$$

$$= 2|x^2| + 3|x| + 1$$

$$\le 2|(3)^2| + 3|(3)| + 1$$

$$= 28$$

dan

$$|2x - 1| \ge ||2x| - |1||$$

$$\ge ||2(2)| - |1||$$

$$= 3$$

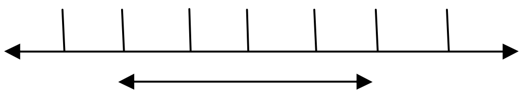
Sehingga $|f(x)| = \dfrac{|2x^2 - 3x + 1|}{|2x - 1|} \le \dfrac{28}{3}$ .Jadi, dengan mengambil $M = \dfrac{28}{3}$, didapat

$|f(x)| \le M$, untuk setiap $x \in [2,3]$.

Garis Bilangan Real (The Real line)

Interpetasi geometri yang dikenal di antaranya garis bilangan real (real line). Pada garis real, nilai mutlak $|a|$ dari suatu elemen $a \in \Re$ adalah jarak a ke 0. Secara umum,**jarak** (*distance*) antara elemen a dan b di $\Re$ adalah $|a - b|$. Perhatikan gambar berikut.

-3 -2 -1 0 1 2 3



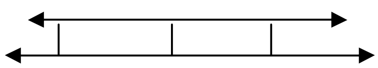
$|-2-(1)| = 3$

Gambar 1.1. Jarak antara $a = 2$ dan $b = 1$.

Definisi 1.2.6 Diberikan $a \in \Re$ dan $\varepsilon > 0$. Persekitaran - ε *(ε -neighborhood)* dari a didefinisikan sebagai himpunan.

$$V_\varepsilon(a) = \{x \in \Re ; |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

$V_\varepsilon(a)$



$a - \varepsilon$

$a \qquad a+\varepsilon$

Gambar 1.2. Pesekitaran $V_{\varepsilon}(a)$.

Dapat dilihat bahwa $x \in V_{\varepsilon}(a)$ jika dan hanya jika $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$. Persekitaran juga sering disebut dengan **kitaran.**

Teorema 1.2.7. *Diberikan $a \in \Re$. Jika x berada dalam persekitaran $V_{\varepsilon}(a)$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka x=a.*

Bukti. Jika x memenuhi $|x-a| < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka berdasarkan Teorema 1.1.10 diperoleh bahwa $|x-a| = 0$, yang berakibat $x = 0$.

1.2 . SOAL LATIHAN SUBBAB

1. Jika a,b ∈ R dan b≠0, tunjukan bahwa :
   a) $|a| = \sqrt{a^2}$
   b) $|\frac{a}{b}| = |\frac{a}{b}|$
2. Jika x,y,z ∈ R dan x ≤ z, tunjukan bahwa x ≤y ≤z jika dan hanya jika
   |x-y|+|y-z|=|x-z|
3. Jika a<x<b dan a<y<b, tunjukan bahwa |x-y|<b-a
4. Carilah semua nilai x∈ R sedemikian hingga |x+1|+x-2| = 7
5. Buatlah sketsa grafik persamaan y = |x|-|x-1|
6. Diberikan $\varepsilon > 0\, dan\, \delta$ >0, dan a∈ R. Tunjukan bahwa $v_{\varepsilon}(a) \cap (a)v_{\delta}$ dan $v_{\varepsilon}(a) \cup v_{\delta}$(a) merupakan persekitaran–y dari a untuk suatu nilai y.
7. Tunjukan bahwa jika a,b ∈ R dan a≠b, maka terdapat terdapat persekitaran-ε U dari a dan V dari b sedemikian hingga U∩ $V = \emptyset$
8. Tunjukan bahwa jika a,b ∈ R, maka
   a) max{a,b}= $\frac{1}{2}$(a+b+|a-b|) dan min {a,b}= $\frac{1}{2}$(a+b-|a-b|)
   b) min{a,b,c} = min{min{a,b},c}

1.3.Sifat lengakap R

Pada bagian ini akan diberikan salah satu sifat dari R yang sering disebut demgan sifat lengkap (completeness property). Tetapi sebelumnya, perlu dijelaskan terlebih dahulu konsep suprenum dan infimum.

Supremum dan infimum

Berikut ini diperkenalkan konsep tentang batas atas dan batas bawah dari suatu himpunan bilangan real.

Definisi 1.3.1 diberikan subset tak kosong $S \subset \Re$

(a) Himpunan S dikatakan **terbatas ke atas** *(bounded above)* jika terdapat suatu bilangan $u \in \Re$ sedemikian hingga $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan u seperti ini disebut dengan **batas atas** *(upper bound)* dari S.

(b) Himpunan S dikatakan **terbatas ke bawah** *(bounded below)*jika terdapat suatu bilangan $w \in \Re$ sedemikian hingga $w \leq s$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan w seperti ini disebut dengan **batas bawah** *(lower bound)* dari S.

(c) Suatu himpunan dikatakan **terbatas** *(bounded)* jika terbatas ke atas dan terbatas ke bawah . Jika tidak, maka dikatakan **tidak terbatas** *(unbounded).*

Sebagai contoh, himpunan $S := \{x \in \Re : x < 2\}$ ini terbatas keatas, sebab bilangan 2 dan sebarang bilangan lebih dari 2 merupakan batas atas dari S. Himpunan ini tidak mempunyai batas bawah, jadi himpunan ini tidak terbaras kebawah. Jadi, S merupakan himpunan yang tidak terbatas.

Definisi 1.2.3 diberikan S subset tak kosong $\Re$.

(a) Jika S terbatas ke atas, maka suatu bilangan u disebut **supremum** (batas atas terkecil) dari S jika memenuhi kondisi berikut:

(1) u merupakan batas atas S, dan

(2) Jika v adalah sembarang batas atas S, maka $u \leq v$.

Ditulis $u = \sup S$

(b) Jika S terbatas ke bawah, maka suatu bilangan u disebut **infimum**.(batas bawah terbesar) dari S jika memenuhi kondisi berikut :

(1) w merupakan batas bawah S, dan

(2) Jika t adalah sebarang batas bawah S, maka $t \leq w$.

Ditulis $w = \inf S$.

Mudah untuk dilihat bahwa jika diberikan suatu himpunan S subset dari $\Re$, maka hanya terdapat satu supremum, atau supremumnya tunggal. Juga dapat ditunjukan bahwa jika u' adalah sebarang batas atas dari suatu himpunan tak kosong

S, maka sup $\leq$ *u'* , sebab sup s merupakan batas atas terkecil dari *S*. suatu subset tak kosong *S* $\subset \Re$ mempunyai empat kemungkinan,yaitu

i. Mempunyai supremum dan infimum,
ii. Hanya mempunyai supremum,
iii. Hanya mempunyai infimum,
iv. Tidak mempunyai infimum dan supremum

Setiap bilangan real $a \in \Re$ merupakanbatas atas dan sekaligus juga merupakan batas bawah himpunan kosong ∅. Jadi, himpunan ∅ tidak mempunyai supremum dan infimum

Lemma 1.3.3 Suatu bilangan u merupakan supremum dari subset $S \subset \Re$ jika dan hanya jika u memenuhi kondisi berikut:

1. x $\leq u$ untuk semua s $\in S$,
2. jika $v < u$, maka terdapat s' ϵ S sedemikian hingga x < s'.

Lemma 1.3.4 Diberikan subset kosong $S \subset \Re$

a. u = sup S jika dan hanya jika unuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_1 \in S$ sedemikian hingga $u - \epsilon < s_1$.

b. w = inf S jika an hanya jikauntuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_2 \in S$ sedemikian hingga $u - \varepsilon < s_2$.

Bukti

a) => Diketahui u = sup S dan diberikan $\varepsilon > o$.Karena u- $\varepsilon < u$,maka u-ε bukan merupakan batas atas S. Oleh karena itu, terdapat $s_1 \in S$ yang lebih besar dari u- ε, sehingga u- $\varepsilon < s_1$.

<= Diketahui u- $\varepsilon < s_{1,}$ Jika u merupakan batas atas S, dan jika memenuhi $v < u$, maka diambil $\varepsilon = u - v$. Maka jelas $\varepsilon > 0$,dan diperoleh bahwa u= sup S.

b) Coba buktikan sendiri.

Contoh 1.3.5

(a) Jika suatu himpunan tak kosong S_1 mempunyai elemen sebanyak berhingga, maka dapat dilihat bahwa S_1 mempunyai elemen terbesar, namakan u, dan elemen terkecil, namakan w. Maka u = sup S_1 dan w = inf S_1, dan keduanya merupakan elemen S_1.

(b) Himpunan $S_2 := \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ mempunyai batas atas 1. Akan dibuktikan bahwa 1 merupakan supremumnya. Jika v < 1, maka terdapat $s^{'} \in S_2$ sedemikian hingga $v < s^{'}$. Oleh karena itu, v bukan merupakan batas atas S_2 dan karena v merupakan sebarang v < 1, maka dapat disimpulkan bahwa sup S_2 = 1. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa inf S_2 = 0.

Sifat Lengkap $\Re$

Akan ditunjukkan bahwa subset tak kosong $\Re$ yang terbatas ke atas pasti mempunyai batas atas terkecil. Sifat seperti ini disebut Sifat Lengkap $\Re$. Sifat Lengkap juga sering disebut dengan **Aksioma Supremum $\Re$**.

1.3.6. Sifat Lengkap $\Re$ *Jika subset tak kosong $S \subset \Re$ yang terbatas ke atas, maka supremumnya ada, yaitu terdapat $u \in \Re$ sedemikian hingga $u = \sup S$.*

Akibat 1.3.7. *Jika subset tak kosong* $S \subset \Re$ *terbatas ke bawah, maka infimumnya ada, yaitu terdapat* $w \in \Re$ *sedemikian hingga* $w = \inf S$.

Bukti Misalkan himpunan T terbatas ke bawah, $T \subset \Re$. Dibentuk himpunan $S = \{-t : t \in T\}$, maka S terbatas ke atas dan tidak kosong. Menurut Aksioma Supremum, sup S ada, namakan $u = \sup S$, maka $-u = \inf T$.

SOAL LATIHAN SUBBAB 1.3

1. Diberikan $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Apakah S mempunyai batas bawah dan batas atas ? Apakah inf S dan sup S ada? Buktikan jawabanmu.
2. Diberikan $T := \{1 - (-1)^n / n : n \in \mathbb{N}\}$. carilah inf Tdan sup T .
3. Diberikan S subset tak kosong $\mathbb{R}$ yang terbatas kebawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup\{-s : s \in S\}$.
4. Tunjukan bahwa jika A dan B subset terbatas dari $\mathbb{R}$, maka $A \cup B$ merupakan himpunan terbatas. Tunjukan bahwa $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$
5. Diberikan $S \subseteq \mathbb{R}$ dan misalkan $s^* :=$ sup S dalam S. jika $u \notin S$, tunjukan bahwa $\sup(S \cup \{u\}) = \sup\{s^*, u\}$.
6. Tunjukan bahwa himpunan berhingga $S \subseteq \mathbb{R}$ memuat supremumnya.
7. Jelaskan dan buktikan lemma 1.3.3.

1.4. Penggunaan Sifat Aksioma Supremum

Pada subbab ini dibahas beberapa akibat dari aksioma supremum.

Teorema 1.4.1. *Diberikan subset tak kosong* $S \subseteq \mathbb{R}$ *yang terbatas ke atas dan sebarang* $a \in \mathbb{R}$. *Diferensikan himpunan* $+S := \{a + s : s \in S\}$ *, maka berlaku*

$$\sup(a + S) = a + \sup(S).$$

Bukti. Jika diberikan $u := \sup S$, maka $x \le u$ untuk semua $x \in S$, sehingga $a + x \le a + u$. Oleh karena itu, $a + u$ merupakan batas atas dari himpunan $a + S$. Akibatnya $\sup(a + S) \le a + u$. Selanjutnya, misalkan v adalah sebarang batas atas $a + S$, maka $a + x \le v$ untuk semua $x \in S$. Akibatnya $x \le v - a$ untuk semua $x \in S$, sehingga $v - a$ merupakan batas atas S. Oleh karena itu, $u = \sup S \le v - a$. Karena v adalah sebarang batas atas $a + S$, maka dengan mengganti v dengan $u = \sup S$, diperoleh $a + u \le \sup(a + S)$. Di lain pihak diketahui $\sup(a + S) \le a + u$. Akibatnya terbukti bahwa $\sup(a + S) = a + u = a + \sup S$.

Teorema 1.4.2. *Diberikan subset tak kosong* $S \subset \mathbb{R}$ *yang terbatas dan sebarang bilangan real* $a > 0$. *Didefinisikan himpunan* $aS := \{as : s \in S\}$, *maka berlaku* $\inf(aS) = a \inf(S)$.

Bukti. Tulis $u = \inf aS$ dan $v = \inf S$. Akan dibuktikan bahwa $u = av$. Karena $u = \inf aS$, maka $u \le as$,untuk setiap $s \in S$. Karena $v = \inf S$, maka $v \le s$ untuk setiap $s \in S$. Akibatnya $av = as$ untuk setiap $s \in S$. Berarti av merupakan batas bawah aS. Karena u batas bawah terbesar aS, maka $av \le u$. Karena $u \le as$ untuk setiap $s \in S$, maka diperoleh $\dfrac{u}{a} \le s$ untuk setiap $s \in S$ (sebab $a > 0$). Karena $v = \inf S$, maka $\dfrac{u}{a} \le v$ yang berakibat $u \le av$. Di lain pihak diketahui $av \le u$. Akibatnya $u \le av$. Jadi, terbukti bahwa inf $(aS) = a\inf(S)$.

Teorema 1.4.3. *Jika A dan B subset tak kosong R dan memenuhi $a \le b$ untuk semua $a \in A$ dan $b \in B$, maka*

$$\sup A \le \inf B.$$

Bukti. Diambil sebarang $b \in B$, maka $a \le b$ untuk semua $a \in A$. Artinya bahwa b merupakan batas atas A, sehingga sup $A \le b$. Selanjutnya, karena berlaku untuk semua $b \in B$,maka sup A merupakan batas bawah B. Akibatnya diperoleh bahwa sup $A \le \inf B$.

Sifat Archimedes

Berikut ini diberikan salah satu sifat yang mengaitkan hubungan antara bilangan real dan bilangan asli. Sifat ini menyatakan bahwa apabila diberikan sebarang bilangan real x ,maka selalu dapat ditemukan suatu bilangan asli n yang lebih besar dari x.

1.4.4. Sifat Archimedes. *Jika $x \in R$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x \in n$.*

Bukti. Ambil sebarang $x \in R$. Andaikan tidak ada $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x < n$, maka $n \le x$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, x merupakan batas atas $\mathbb{N}$. Jadi, $\mathbb{N} \subset R$, $\mathbb{N} \ne \emptyset$, dan $\mathbb{N}$ terbatas ke atas. Menurut aksioma supremum,maka sup $\mathbb{N}$ ada, tulis $u = \sup \mathbb{N}$. Karena $u - 1 < u$, maka terdapat $m \in \mathbb{N}$ dengan sifat $u - 1 < m$. Akibatnya $u < m + 1$ dengan $m + 1 \in \mathbb{N}$. Timbul kontradiksi dengan $u = \sup \mathbb{N}$. Berarti u batas atas $\mathbb{N}$, yaitu ada $m + 1 \in \mathbb{N}$ sehingga $u < m + 1$ (bukan u bukan batas atas $\mathbb{N}$). Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah ada $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x < n$.

Akibat 1.4.5. *Jika S:=* $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in N\right\}$ *,maka* inf S = 0.

Bukti. Karena $S \ne \emptyset$ terbatas ke bawah oleh 0, maka S mempunyai infimum, tulis $w := \inf S$.

Jelas bahwa $w \ge 0$. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, menggunakan Sifat Archimedes, terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{\varepsilon} < n$, akibatnya $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa

$$0 \le w \le \frac{1}{n} < \varepsilon .$$

Akan tetapi karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka berdasarkan Teorema 1.1.10 berakibat bahwa $w = 0$. Terbukti bahwa $\inf S = 0$.

Akibat 1.4.6. *Jika $t > 0$, maka terdapat $n_t \in$* N sedemikian hingga $0 < \frac{1}{n_t} < t$.

Bukti. Karena inf $\left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\} = 0$ dan t >0 , maka t bukan batas bawah himpunan $\left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$. Akibatnya terdapat $n_t \in$N sedemikian hingga $0 < \frac{1}{n_t} < t$.

Akibat 1.4.7. Jika y > 0, maka terdapat n, ∈ ℕ sedemikian hingga $n_y - 1 < y < n_y$.

Bukti. Sifat Archimedes menjamin bahwa subset $E_y \coloneqq \{m \in \mathbb{N} : y < m\}$ dari ℕ tidak kosong. Menggunakan Sifat Urutan, E_y mempunyai elemen yang paling kecil, yang dinotasikan dengan n_y. Oleh karena itu, $n_y - 1$ bukan elemen E_y. Akibatnya diperoleh bahwa $n_y - 1 < y < n_y$.

Eksistensi Bilangan Real dan Densitas Bilangan Rasional di ℝ

Salah satu penggunaan Sifat Supremum adalah dapat digunakan untuk memberikan jaminan eksistensi bilangan-bilangan real. Berikut ini akan ditunjukkan bahwa ada bilangan real positif x sedemikian hingga $x^2 = 2$.

Teorema 1.4.8. Ada bilangan real positif x sedemikian hingga $x^2 = 2$.

Bukti. Dibentuk himpunan $S = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0 \; dan \; s^2 < 2\}$. Jelas bahwa $S \neq \emptyset$ sebab $0 \in S$ dan $1 \in S$. S terbatas ke atas dengan salah satu batas atasnya adalah 2. Jika $t \geq 2$, maka $t^2 \geq 4$. Jadi, $t = 2 \notin S$. Menggunakan Aksioma Supremum, $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, dan S terbatas ke atas, maka S mempunyai supremum. Namakan $x = \sup S$, dengan $x \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa $x^2 = 2$. Andaikan $x^2 \neq 2$, maka $x^2 < 2$ atau $x^2 > 2$.

Kemungkinan I : Untuk $x^2 < 2$.

Karena $x^2 < 2$, maka $2 - x^2 > 0$. Karena $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, maka

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{1}{n}(2x + 1).$$

Karena $2 - x^2 > 0$ dan $2x + 1 > 0$, maka $\frac{2-x^2}{2x+1} > 0$. Menurut akibat Sifat Archimedes, dapat ditemukan $n \in \mathbb{N}$ sehingga

$$\frac{1}{n} < \frac{2 - x^2}{2x+1}$$

Akibatnya,

$$\frac{1}{n}(2x + 1) < 2 - x^2$$

dan

$$\left(x+\frac{1}{n}\right)^2 < x^2 + \frac{1}{n}(2x+1) < x^2 + 2 - x^2 = 2$$

Diperoleh bahwa $\left(x+\frac{1}{n}\right)^2 < 2$, yang berarti bahwa $+\frac{1}{n} \in S$. Kontradiksi dengan $x =$ sup S. Oleh karena itu tidak mungkin $x^2 < 2$.

Kemungkinan II: $x^2 > 2$.

Karena $x^2 > 2$, maka $x^2 - 2 > 0$. Perhatikan bahwa

$$\left(x-\frac{1}{m}\right)^2 = x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} > x^2 - \frac{2x}{m}.$$

Karena $x^2 - 2 > 0$ dan $2x > 0$, maka dipilih $m \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga

$$m > \frac{2x}{x^2-2} \text{ atau } \frac{2x}{m} < x^2 - 2 .$$

Akibatnya

$$\left(x-\frac{1}{m}\right)^2 > x^2 - \frac{2x}{m} > x^2 - (x^2 - 2) = 2 .$$

Diperoleh bahwa $\left(x-\frac{1}{m}\right)^2 > 2$. Berarti $x - \frac{1}{m} \notin S$, yaitu $x - \frac{1}{m}$ batas atas. Kontradiksi dengan $x =$ sup S. Oleh karena itu tidak mungkin $x^2 > 2$. Jadi pengandaiannya salah, yang benar adalah $x^2 = 2$.

1.4.9. Teorema Densitas (The Density Theorem) *Jika* $x, y \in \mathbb{R}$ *dengan* $x < y$, *maka ada bilangan rasional* $q \in \mathbb{Q}$ *sedemikian hingga* $x < q < y$.

Bukti.Dengantidakmengurangikeumuman(*without loss of generality*), di ambil x < y , maka y > 0. Akibatnya$\frac{1}{y-x}$>0 , sehingga dapat dipilih n∈ ℕ sedemikian hingga

$$n > \frac{1}{y-x}$$

Untuk*n* di atas, berlaku*ny-nx*>1,yaitu*nx+1<ny*. Karenanx>0, makadapat di pilih*m* ∈ ℕsehingga

$$m-1 \le nx < m$$

Bilangan*m* di atasjugamemenuhi*m<ny*, sebabdari*m-1≤nx,* diperoleh*m≤nx+1<ny*. Jadi *nx<m<ny*

Akibatnyauntuk $q=\frac{m}{n}$mempunyaisifat$x<\frac{m}{n}=q<y$.Jaditerdapatbilanganrasional $q=\frac{m}{n}$dengansifat x<q<y

Berikutinidiberikanakibat TeoremaDensitas, yaitudiantaraduabilangan real pastidapatditemukanbilanganirrasional

Akibat 1.4.10.*jikax,y∈ ℝ dengan x<y, maka ada bilangan irrasional r sedemikianhingga x<r < y*

Bukti.MenggunakanTeoremaDensitas, adabilangan real $\frac{x}{\sqrt{2}}$dan$\frac{y}{\sqrt{2}}$dengan bilangan rasional q dengansifat$\frac{x}{\sqrt{2}}$< q <$\frac{y}{\sqrt{2}}$. Akibatnya , x<q$\sqrt{2}$<y dan q$\sqrt{2}$ merupakanbialnganirrasional.

SOAL LATIHAN SUBBAB 1.4

1. Diberikan himpunan tak kosong X dan $f : X \rightarrow$R mempunyai range terbatas di R. Jika $a\epsilon$R, tunjukkan bahwa :
   (a) sup{ $a + f(x) : x\epsilon\ X$ } = a + sup { $f(x) : x\epsilon\ X$ }.
   (b) inf{ $a + f(x) : x\epsilon\ X$ } = a + inf { $f(x) : x\epsilon\ X$ }.
2. Diberikan subset tak kosong A dan B dari R. Dibentuk himpunan A+B = {$a + b : a\epsilon A$ dan $b\epsilon B$ }. Buktikan bahwa sup (A+B) = sup A+sup B dan inf(A+B) = inf A + inf B.
3. Jika diberiakan sebarang $x\epsilon$ R, tunjukkan bahwa terdapat dengan tunggal $n\epsilon$ Z sedemikian hingga $n - 1 \leq x \leq n$.
4. Jika y> 0, tunjukkan bahwa terdapat $n\epsilon$ N sedemikian hingga $\frac{1}{2^n}$<y.
5. Jika u> 0 adalah sebarang bilangan real dan x<y, tunjukkan bahwa terdapat bilangan rasional r sedemikian hingga x<ru<y.

1.5. INTERVAL DALAM R

Jika diberikan $a,b\epsilon$ R dengan a<b, maka **interval terbuka** yang ditentukan oleh α dan b adalah himpunan

$$(a,b) = \{\ x\epsilon \mathrm{R} : a<x< b\ \}.$$

Titik α dan b disebut **titik ujung** (endpoints) interval. Titik ujung tidak termuat dalam interval terbuka. Jika kedua titik ujung digabungkan ke dalam interval terbukanya, maka disebut **interval tertutup**, yaitu himpunan

$$[a,b] = \{\ x\epsilon \mathrm{R} :\ a<x <b\ \}.$$

Interval **setengah terbuka** atau **setengan tertutup** adalah interval yang memuat salah satu titik ujungnya. Gabungan interval terbuka dengan titik ujung a, ditulis [a,b), dan gabungan interval terbuka dengan titik ujung b, ditulis (a,b]. Masing-masing interval tersebut terbatas dan mempunyai **panjang**(length) yang didefinisikan dengan b-a. Jika a=b, maka interval terbukanya berkorespondensi dengan himpunan kosong

$(a,a)=\varnothing$,dan interval tertutupnyaberkorespodensidenganhimpunan singleton $[a,a]=\{a\}$.

Berikutinidiberikanlimajenis interval tidakterbatas.Simbol$\infty(atau+\infty)$dan$-\infty$ digunakansebagai symbol titikujungnya yang takberhingga.**Intervalterbukatakterbatas**adalahhimpunandenganbentuk

$$(a,\infty):=\{x\in R : x>a\}dan(-\infty,b):=\{x\in R : x<b\}.$$

Himpunanpertamatidakmempunyaibatasatasdan yang keduatidakmempunyaibatasbawah.Himpunan(a,∞) seringjugadisebutdengan**sinarterbuka***(open a ray)*.Diberikan**interval tertutuptakterbatas,**yaitu

$$[a,\infty):=\{x\in R : a\le x\} dan (-\infty,b]:=\{x\in R : x\le b\}.$$

Himpunan $[a,\infty)$ seringdisebutdengansinartertutup(close a ray).Himpunan R dapatdituliskansebagai $(-\infty,\infty):=R.$ Perhatikanbahwa ∞ *dan* $-\infty$ bukanelemen R.

1.5.1.TeoremaKarakteristik Interval Jika s adalah subset R yang memuat paling sedikitduatitikdanmempunyaisifat :

$$\text{jika } x,y\in S \; dan \, x<y. maka [x,y]\subseteq S.$$

maka S merupakansuatu interval.

Interval susut(Nasted Intervals)

Telahdiketahuibahwabarisanadalahfungsi f:N $f:\mathrm{N}\to A\neq\emptyset$.Jika A adalahhimpunan interval-interval,makaterbentukbarisan interval $\{I_n\}_{n\ge 1}$. Untukmempersingkatpenulisan,barisan $\{I_n\}_{n\ge 1}$ cukupditulis I_n.

Definisi 1.5.2.(Interval Sudut) Barisan $I_n.n\in\mathrm{N}$ dikatakan interval susut (nested intervals) Jika

$$I_1\supseteq I_2\supseteq I_3.....\supseteq I_n\supseteq I_{n+1}\supseteq.....$$

Contoh 1.5.3.

(1) Diberikan $I_n = \left[0,\frac{1}{n}\right], n\in N$, Yaitu I_1 = [0,1], $I_2 = \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $I_3 = \left[0,\frac{1}{3}\right]$, ...

Maka $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$ *(nested)* dan $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$(mempunyai titik berserikat).

(2) Diberikan $I_n = \left(0,\frac{1}{n}\right), n\in N$. Diperoleh bahwa $I_n \supset I_{n+1}$, untuk setiap $n\in N$.

Tetapi $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$. Jadi, interval susut belum tentu mempunyai titik berserikat.

Sebab, andaikan terdapat $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, maka $x \in I_n$ untuk setiap $n\in N$. Karena $x > 0$, maka terdapat $n\in N$ sedemikian hingga $\frac{1}{n} > x$. Kontradiksi dengan pengandaian. Jadi pengandaian salah, yang benar adalah $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

(3) Diberikan $I_n \left[0,1+\frac{1}{n}\right]$, maka I_1 = [0,2], $I_2 = \left[0,1+\frac{1}{2}\right]$, $I_3 = \left[0,1+\frac{1}{3}\right]$, ...

Diperoleh $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. (Ada tak hingga banyak $\xi \in [0,1]$). Perhatikan

bahwa inf $\left\{1 + \frac{1}{n} : n \epsilon N\right\} = 1$

1.5.4. Sifat Interval Susut *(Nested Interval Property)* Jika $I_n = [a_n, b_n]$. $n \epsilon N$ interval tertutup terbatas dan $I_n \supseteq I_{n+1}$ untuk setiap $n \epsilon N$ *(interval susut)*, maka

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset,$$

Yaitu terdapat $\xi \in R$ sedemikian hingga $\xi \in I_n$ untuk setiap $n \epsilon N$. Selanjutnya, jika Panjang $I_n = b_n - a_n$ memenuhi inf $\{b_n - a_n : n \epsilon N\} = 0$, maka elemen berserikat ξ tersebut tunggal.

Bukti.Dibentuk himpunan$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Jelas $A \neq \emptyset$ sebab $a_1 \in A$, dan $A \subset \mathbb{R}$. Himpunan A terbatas ke atas, sebab $I_n \supseteq I_{n+1}$untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga diperoleh bahwa

$$a_n \leq b_n$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, yang berarti $b_1$batas atas A. Menggunakan Sifat Lengkap $\mathbb{R}$, maka supremum Aada, yaitu terdapat$\xi \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga ξ sup A. Jelas bahwa

$$a_m \leq \xi$$

Untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Selanjutnya untuk sebarang $m, n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_n \text{ atau } a_n \leq b_n$$

Hal ini berakibat

$$\sup\{a_n : \in \mathbb{N}\} \leq b_n \text{atau } \xi \leq b_m$$

Karena$a_m \leq \xi$dan$\xi \leq b_m$, maka diperoleh $a_m \leq \xi \leq b_m$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, berarti $\xi \in I_n = [a_n, b_n]$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n,$$

Yang berakibat$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

. jika$\eta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, maka dengan cara yang sama (sebelumnya), diperoleh$\eta \in I_m$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Sehingga diperoleh

$$\eta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Akan dibuktikanketunggalannya, yaitu$\eta = \xi$ .Diambilsebarang$\varepsilon > 0$. jikainf$\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, makaterdapat$n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga

$$0 \leq \eta - \xi \leq bn_o - an_0 < \varepsilon \text{ atau } 0 \leq \eta - \xi < \varepsilon.$$

Karenaberlakusebarang$\varepsilon > 0$.maka$\eta - \xi = 0$ atau $\eta = \xi$. jadi, terbuktibahwa$\eta = \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ tunggal.

Himpunan Terhitung (Countable)

Diberikan J_n= {1,2,3,...,n}, $n \in \mathbb{N}$. Dua himpunan A dan B dikatakan **ekuivalen,** ditulis $A \sim B$ jika ada fungsi bijektif $f : A \to B$. Contoh:

1. Misalkan A={1,2,3} dan B={a,b,c} , maka $A \sim B$.
2. Misalkan $f : A \to C$ dengan C = {w,x,y,z} , maka $A \neq C$.

Suatu himpunan dikatakan **tak berhingga** (*infinite*) jika himpunan tersebut ekuivalen dengan salah satu himpunan bagian sejatinya. Jika tidak demikian, maka himpunan tersebut dikatakan **berhingga**(finite), yaitu ekuivalen dengan J_n. Contoh:

1. Himpunan A ={1,2,3} berhingga.
2. $\mathbb{N}$={1,2,3,...}, T ={2,4,6,...} $\subset \mathbb{N}$. fungsi

   $f: \mathbb{N} \to T$

   $n \to f(n) = 2n$

   Jadi, $\mathbb{N}$ tak berhingga, T juga tak berhingga.

Suatu himpunan D dikatakan **denumerable** jika $D \sim \mathbb{N}$. suatu himpunan dikatakan **terhitung** (*countable)* jika himpunan tersebut berhingga atau *denumerable*. Jika tidak, maka dikatakan himpunan **tak terhitung** (*uncountable* atau *no denumerable*), yaitu himpunan yang tidak ekuivalen dengan $\mathbb{N}$. Jika himpunan A terhitung, maka A dapat disajikan sebagai A ={x_1, x_2, x_3,...} dengan $x_i \neq x_j$ untuk $i \neq j$.

Contoh:

1. Himpunan $\emptyset$ terhitung berhingga.
2. Himpunan $\mathbb{N}$ terhitung tak berhingga.
3. Himpunan A = {1,2,3} terhitung berhingga.

Dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}$merupakan himpunan tak terhitung. Untuk membuktikannya cukup hanya dengan membuktikan I = [0,1] tak terhitung. Berikut ini diberikan teoremanya.

V_ε (0) = ($-\varepsilon, \varepsilon$) . jika dipilih ε sangat kecil, maka 0 <$\frac{1}{n}$<ε . jadi, 0 merupakan titik cluster B dengan $0 \notin B$.

Teorema 1.5.5. *himpunanI* =[0,1] *tak terhitung.*

Bukti. Andaikan*I*terhitung , maka dapat ditulis dengan

$$I=\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$$

Dikonstruksikan interval tertutup, terbatas, susut (*nested)*, dan inf {bn – a_n : $\in \mathbb{N}$} = 0. Interval I = [0,1] di bagi menjadi tiga sama panjang, yaitu

[0, 1/3], [1/3, 2/3], dan [2/3, 1]

Titik $x_1 \in I$ termuat dalam paling banyak dua sub interval. Pilih sub interval yang tidak memuat x_1, namakan $I_1 = [a_1, b_2]$. Jadi, $x_1 \notin I_1$. Selanjutnya, I_1 dibagi menjadi tiga sama panjang, yaitu:

$$[a_1, a_1, + 1/9], [$$

Kemudian pilih sub interval yang tidak memuat, namakan. Jadi, Jika proses diteruskan, diperoleh barisan interval tertutup, terbatas, $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n$ dengan inf $\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf \{1/3\mathbb{N}\}$. Menggunakan sifat *Nested Interval*, maka terdapat dengan tunggal $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. berarti $y \in I$, yaitu $y = x_n$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya $x_n \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ yaitu $x_n \in I_n$. Sedangkan dari konstruksi diperoleh $x_n \notin I_n$. Timbul kontradiksi, yang benar adalah $I = [0,1]$ tak terhitung, sehingga $\mathbb{R}$ juga tak terhitung.

Teorema Bolzano-Weirrstrass

Sebelum dijelaskan tentang teorema Bolzano-Weirrstrass terlebih dahulu dijelaskan mengenai titik cluster. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 1.5.6 (Titik Cluster) Diberikan subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$. Titik $x \in \mathbb{R}$ disebut **titik cluster** *(cluster points)* jika setiap persekitaran $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ memuat paling sedikit satu titik anggota S yang tidak sama dengan x. Titik cluster sering disebut dengan **titik akumulasi atau titik limit.**

Dengan kata lain, x titik cluster S jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $(V_\varepsilon(x) \cap S) - \{x\} \neq \emptyset$ atau $(V_\varepsilon(x) - \{x\} \cap S \neq \emptyset$.

Ekuivalen dengan mengatakan bahwa x titik cluster S jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, terdapat $S_n \epsilon S$ sedemikian hingga $0 < |S_n - x| < \frac{1}{n}$.

Contoh 1.5.7

(1) Diberikan $S = (0,2)$. Apakah 0 merupakan titik cluster?

Jawab. Diambil $\varepsilon > 0$, maka $V_\varepsilon(0) = (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Menggunakan Teorema Densitas, maka 0 merupakan titik cluster S dan $0 \notin S$. Demikian juga bahwa $\frac{1}{2}$ merupakan titik cluster S dan $\frac{1}{2} \in S$.

(2) Diberikan $A = [1,2] \cup \{4\}$. Apakah 4 titik cluster?

Jawab. Persekitaran $-\varepsilon$ dari 4 adalah $V_\varepsilon(4) = (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$. Misla diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}$, maka $V_\varepsilon(4) = \left(4 - \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{2}\right) = \left(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$. sehingga diperoleh bahwa $\left(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right) \cap [1,2] - \{4\} = \emptyset$. Jadi, 4 bukan titik cluster.

(3) Diberikan $B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots.\right\}$. Tunjukkan bahwa 0 titik cluster B dengan $0 \notin B$.

Jawab. Menggunakan Sifat Archimedes, jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Persekitaran titik 0 adalah $V_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Jikadipilih ε sangatkecil, maka $0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Jadi 0 merupakantitik cluster *B*dengan $0 \notin B$

1.5.8 Teorema Bolzano-Weierstrass *Setiap subset* $\mathbb{R}$ *yang tidak berhingga(infinite) danterbatas, mempunyai paling sedikitsatutitik cluster.*

Bukti. Diberikan sebarang subset $S \subset \mathbb{R}$ tidak berhingga dan terbatas. Karena S terbatas, maka terdapat interval I_1=[a,b] denganpanjang$\mathcal{L}(I_1)$=b-a. Kemudian bagilahI_1menjadiduabagian, yaitu $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ dan $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$.Karena$S$ tak berhingga, maka salah satu interval tersebut memuat tak hingga banyak titik anggota S, sebab apabila keduanya memuat berhingga banyak anggota S, maka berarti himpunan S berhingga. Namakan bagian yang memuat takhingga banyak titik anggota S dengan I_2.Panjangnya $\mathcal{L}$ (I_2)= $\dfrac{b-a}{2}$. SelanjutnyaI_2, dibagi menjadi dua bagian seperti langkah di atas, maka salah satu bagian yang memuat takhingga banyak anggota$S$. Namakan bagian tersebut dengan I_3.Panjangnya$\mathcal{L}$ (I_3)=$\dfrac{b-a}{2^2}$. Apabila proses diteruskan, maka diperoleh barisan interval susut*(nested)*

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots.$$

MenurutSifat Interval Susut, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$, atau terdapat $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

Akan ditunjukkan bahwa x titikcluster S. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, makaterdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\dfrac{b-a}{2^{n-1}} < \varepsilon$, ,danpersekitarannya $V\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ Karena $x \in I_n$ dan$\mathcal{L}$(I_n)=$\dfrac{b-a}{2^{n-1}} < \varepsilon$, maka $I_n \subseteq V_\varepsilon(x)$. Karena$I_n$, memuat tak hingga banyak titik anggota$S$,maka $V_\varepsilon(x)$ memuat takhingga banyak titik anggota$S$ yang tidak sama dengan x. Jadi, x. merupakan titik cluster S.

Himpunan Terbuka dan Tertutup

Definisi 1.5.9.

i. Himpunan $G \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan **terbuka** dalam $\mathbb{R}$ jika untuk setiap $x \in G$, terdapat persekitaran $V_\varepsilon(x)$ sedemikian hingga $V_\varepsilon(x) \subset G$.

ii. Himpunan $F \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan **tertutup** dalam $\mathbb{R}$ jika komplemen F, yaitu F^c terbuka dalam $\mathbb{R}$.

Contoh 1.5.10.

1) Himpunan $\mathbb{R}$ = (-∞,∞) terbuka, sebab untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, terdapat $V_1(x) = (x-1, x+1) \subset \mathbb{R}$.
2) Himpunan $A = (0,1)$ terbuka, sebab jika diambil $\varepsilon = min\left\{\frac{x}{2}, \frac{x-1}{2}\right\}$ untuk setiap $x \in A$, maka $V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.
3) Himpunan $B = [1,2]$ tertutup, sebab jika diambil $x = 1$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0, V_\varepsilon(1) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \not\subset B$ dan $1-\varepsilon \notin B$. Dapat ditunjukkan juga bahwa B^c terbuka, yaitu$B^c = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ terbuka.

1.5.11. Sifat Himpunan Terbuka

a) *Jika A himpunan indeks (berhingga atau tak berhingga) dan G_x terbuka untuk setiap$\lambda \in A$, maka $\bigcup_{\lambda \varepsilon A} G_\lambda$ terbuka.*

b) *Jika $G_1, G_2, \ldots, G_n$ masing-masing merupakan himpunan terbuka, maka $\bigcap_{i=1}^n G_i$ terbuka.*

Bukti.

a) Namakan $G = \bigcup_{\lambda \epsilon A} G_\lambda$. Diambil sebarang $x\epsilon\ G$, maka terdapat $\lambda_0 \epsilon\ A$ sedemikian hingga $x\epsilon\ G_{\lambda_0}$. Karena G_{λ_0}terbuka, maka terdapat

$V_\varepsilon\ (x) \subset G_0\ \subset$ G . Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $x \in G$, terdapat $V_\varepsilon\ (x) \subset G$,

Yang berarti $G = \bigcup_{\lambda \epsilon \mathrm{A}} G_\lambda$terbuka.

(b) Namakan $H = .\bigcap_{i=1}^n G_i$ .Akan ditunjukkkan bahwa H terbuka. Diambil sebarang $x\epsilon\ H$, maka $x\epsilon\ G_i$, i =1,2,…,n .

Karena $x\epsilon\ G_1$dan G_1terbuka, maka terdapat $\varepsilon_1 >0$ sehingga $V_{\varepsilon_1}(x) \subset G_1$.

Karena $x\epsilon\ G_2$ dan G_2 terbuka, maka terdapat $\varepsilon_2 >0$ sehingga $V_{\varepsilon_2}(x) \subset G_2$.

Demikian seterusnya.

Karena $x\epsilon\ G_n$ dan G_n terbuka, maka terdapat $\varepsilon_n >0$ sehingga $V_{\varepsilon_n}(x) \subset G_n$.

Namakan = $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$, jelas bahwa $\varepsilon >0$. Maka$V_\varepsilon\ (x) \subset V_{\varepsilon_i}(x) \subset G_i$.

untuk setiap i =1,2,…,n, yang berakibat bahwa $V_\varepsilon\ (x) \subset H = .\bigcap_{i=1}^n G_i$.Jadi terbukti bahwa $\bigcap_{i=1}^n G_i$ terbuka.

Berikut ini diberikan akibat dari sifat himpunan terbuka, yaitu sifat untuk himpunan tertutup.

Akibat 1.5.12.

(a). *Jika Ahimpunan indeks (berhingga atau tak berhingga) dan G_x tertutup untuk setiap $\lambda \epsilon\ A$, maka $\bigcup_{\lambda \epsilon \mathrm{A}} G_\lambda$ $tertutup$.*

(b). *Jika $G_1, G_2, \ldots, G_n$, masing – masing merupakan himpunan tertutup, maka*

$\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ *terutup.*

SOAL LATIHAN SUBBAB 1.5

1. Jika $I' := [a, b]$ dan $I' := [a', b']$ interval tertutup dalam $\mathbb{R}$, tunjukan bahwa $I \subseteq I'$ jika danhanya jika $a' \leq a$ dan $b \leq b'$
2. Jika $S \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong, tunjukan bahwa S terbatas jika dan hanya terdapat interval tertutup terbatas I sedemikian hingga $S \subseteq I$
3. Jika $S \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong dan terbatas, dan $I_S := [\inf S, \sup S]$, tunjukan bahwa $S \subseteq I_S$. selanjutnya, jika J adalah sebarang interval tertutup terbatas yang memuat S, tunjukan bahwa $I_S \subseteq J$.
4. Diberikan $K_n :=$ untuk $n \in \mathbb{N}$. buktikan bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} k_n = \emptyset$.
5. Jika S himpunan terbatas di $\mathbb{R}$ dan $T \subset S$ tidak kosong, buktikan bahwa

$$\operatorname{Inf} S \leq \inf T \leq \sup T \leq \sup S.$$

6. Buktikan Akibat 1.5.1.2. .

BAB 2

BARISAN DAN DERET

Pada bab ini dibahas mengenai pengertian barisan dan deret. Selanjutnya, dibahas tentang limit dan konvergensi dari suatu barisan, Di antaranya adalah Teorema Konvergen Monoton, Teorema Bolzano-Weierstrass, dan Kriteria Cauchy untuk barisan yang konvergen.

2.1. Barisan dan limit barisan

barisan (sequence) pada himpunan S adalah suatu fungsi dengan domain $\mathbb{N}$ dan mempunyai range dalam S. Pada subbab ini akan dibahas mengenai barisan di $\mathbb{R}$ dan konvergensi dari suatu barisan.

Definisi 2.1.1. Barisan bilangan real adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan $\mathbb{N}$ dengan range dalam $\mathbb{R}$.

Dengan kata lain, barisan dalam $\mathbb{R}$ mengawankan setiap bilangan asli $n = 1, 2, 3, \ldots$ kepada suatu bilangan real, jika $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan barisan, maka biasanya dituliskan dengan nilai dari X pada n dengan notasi x_n Barisan sering dinotasikan dengan X atau (x_n) atau $(x_n : n \in \mathbb{N})$ atau $\{x_n\}$ atau $\{x_n\}(n \geq 1)$ apabila diketahui suatu barisan Y , artinya $Y = (y_k)$

Contoh 2.1.2.

(a) Barisan (x_n) dengan $x_n = (-1)^n$ adalah barisan $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

(b) Barisan (x_n) dengan $x_n = (\frac{1}{2^{n,}}\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$

(c) Barisan konstan (k_n) dengan k_n= 3 adalah 3,3,3,3,….

(d) Barisan$\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$

Definisi 2.1.3. Diberikanbarisanbilanganreal (x_n)dan (y_n), dan $\alpha \epsilon \mathbb{R}$. Maka dapat didefinisikan

(i) $(x_n) \pm (y_n) = (x_n \pm y_n)$.

(ii) $\alpha(x_n) = (\alpha x_n)$.

(iii) $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n)$.

(iv) $\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)$, asalkan$y_n \neq 0$

Definisi 2.1.4. (Limit Barisan) Diketahui(x_n) barisan bilangan real. Suatu bilangan real x di katakana **limit**barisan(x_n) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \epsilon$ N sedemikian hingga untuk setiap $n \epsilon \mathbb{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Jika$x$ adalah limit suatu barisan (x_n), maka di katakan (x_n)**konvergen**ke$x$,atau (x_n) mempunyai limit x. Dalam hal ini ditulis $\lim_{n \to \infty}(x_n) = x$ atau $\lim(x_n) = x$atau $(x_n) \to x$. Jika (x_n) tidak konvergen, maka (x_n) dikatakan **divergen**.

Teorema 2.1.5.*Jikabarisan(x_n)konvergen, maka(x_n) mempunyai paling banyak satu limit (limitnya tunggal).*

Bukti.Andaikan $\lim_{n \to \infty}(x_n) = x'$ dan $\lim_{n \to \infty}(x_n) = x''$dengan $x' \neq x''$. Maka untuk seberang $\varepsilon > 0$ terdapat K' sedemikian hingga $|x_n - x'| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n \geq K'$, dan terdapat K'' sedemikan hingga $|x_n - x''| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n \geq K''$. Dipilih $K = \max\{K', K''\}$. Menggunakan Ketaksamaan Segitiga, maka untuk $n \geq K$ diperoleh

$$\begin{aligned} |x^l - x^n| &= |x^l - x_n + x_n - x^n| \\ &= |x^l - x_n| + |x_n - x^n| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$,maka $x^l - x^n = 0$ yang berarti Kontrakdiksi dengan pengadaian.Jadi terbukti bahwa limitnya tunggal.

Teorema 2.1.6. Jika (x_n) barisan bilangan real dan $x \in$ R ,maka empat pernyataan berikut ekuivalen.

a). Barisan (x_n) konvergen ke x.

b). Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

c). Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

d). Untuk setiap persekitaran $V_\varepsilon(x)$ dari x, terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $x_n \in V_\varepsilon(x)$.

Bukti.

(a) $\Rightarrow$ (b) Jelas (dari definisi).

(b) $\Rightarrow$ (c) $|x_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

(c) $\Rightarrow$ (d) $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \Leftrightarrow x_n \in V_\varepsilon(x)$.

(d) $\Rightarrow$ (a) $x_n \in V_\varepsilon(x) \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$.

Contoh 2.1.7.

(a) Tunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

*Jawab.*Akan ditunjukkanbahwa $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke 0, yaitu $\frac{1}{n} \to 0$. Harusdibuktikanbahwauntuksetiap$\varepsilon >$ 0 terdapat$K(\varepsilon) \in$ Nsedemikianhinggauntuksetiap$n \in$ Ndengan$n \geq K(\varepsilon)$ berlaku$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Ambilsembarang$\varepsilon >$ 0, maka$\frac{1}{\varepsilon} >$ 0.MenurutSifat Archimedes, makaterdapat$K(\varepsilon) \in$ N sedemikianhingga$\frac{1}{\varepsilon} < K(\varepsilon)$, atau$\frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$. Akibatnyauntuksetiap$n \geq K(\varepsilon)$ berlaku$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$. Jadi, terbuktibahwauntuksetiap$\varepsilon >$ 0 terdapat$K(\varepsilon) \in$ Nsedemikianhinggauntuksetiap$n \in$ Ndengan$n \geq K(\varepsilon)$ berlaku$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, ataulim$_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

(b) Tunjukanbahwa$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$

Jawab. Akan ditunjukkanbahwauntuksetiap$\varepsilon >$ 0 terdapat$K(\varepsilon) \in$ N sedemikianhinggauntuksetiap$n \in$ Ndengan$n \geq K(\varepsilon)$ berlaku$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$. Diambilsebarang$\varepsilon >$ 0, maka$\varepsilon^{1/2} >$ 0, akibatnya $\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} >$ 0. Menurut Sifat Archimedes, terdapat $K(\varepsilon) \in$ N sedemikianhingga$\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} < K(\varepsilon)$ atau$\frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon^{1/2}$, diperoleh $\frac{1}{K(\varepsilon)^2} < \varepsilon$. Akibatnyauntuksetiap$n \geq K(\varepsilon)$ berlaku$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)^2} < \varepsilon$. Jadi, terbuktibahwauntuksetiap$\varepsilon \in$ Nterdapat$K(\varepsilon) \in$ N sedemikianhinggauntuksetiap$n \in$ Ndengan$n \geq K(\varepsilon)$ berlaku$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$, ataulim$_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$.

Contoh 2.1.8.tunjukkanbahwa $\left((-1)^n\right)$divergen.

Jawab.Andaikan $\left((-1)^n\right)$ konvergen, berartiterdapatbilangan real x sehinggauntuksetiap $\varepsilon > 0$ terdapat$K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $\left|(-1)^n - x\right| < 1$.Untuk $n \geq K$ *dan* n genap, maka $(-1)^n = 1$, diperoleh

$$|1 - x| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - x < 1,$$

yangberakibat $x > 0$. Untuk $n \geq K$dan n ganjil, maka $(-1)^n = -1$, diperoleh

$$|-1 - x| < 1 \Leftrightarrow -1 < -1 - x < 1,$$

yangberakibat $x < 0$. Timbulkontradiksi, yaitu $x > 0$ dan $x < 0$.Jadipengandaiansalah, yang benar $\left((-1)^n\right)$divergen.

Teorema 2.1.9.*Diberikanbarisanbilangan real* $X = (x_n : n \in \mathbb{N})$ *dan* $m \in \mathbb{N}$.*Maka* $X_m = (x_{m+n} : n \in \mathbb{N})$ *konvergenjikadanhanyajika* X *konvergen.Dalamhalini* $\lim X_m = \lim X$.

Bukti.Perhatikanbahwauntuksebarang $p \in \mathbb{N}$, elemenke- p dari X_m adalahelemenke-$(p+m)$dari X. Samahalnya, jika $q > m$, makabentukelemenke- q dari X_m adalahelemenke-$(q-m)$dari X.

Diasumsikanbahwa X konvergenke x. Diberikansebarang$\varepsilon > 0$, padabarisan X untuk $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$,makapada X_m untuk $k \geq K(\varepsilon) - m$ berlaku $|x_k - x| < \varepsilon$. Dapatdiambil $K_m(\varepsilon) = K(\varepsilon) - m$, sehingga X_m konvergenke x.

Sebaliknya, jikapada X_m untuk $k \geq K_m(\varepsilon)$ berlaku $|x_k - x| < \varepsilon$, makapada X untuk $n \geq K(\varepsilon) + m$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Dapatdiambil $K(\varepsilon) = K_m(\varepsilon) + m$. Dengandemikianterbuktibahwa X konvergenke x jikadanhanyajika X_m konvergenke x.

Teorema 2.1.10.*Diberikanbarisanbilangan real* (x_n)*dan* $x \in R$. *Jika* (a_n)*adalahsuatubarisanbilangan real positifdengan*$\lim(a_n) = 0$ *danjikauntuk* $c>0$ *dan* $m \in N$ *berlaku*

$$|x_n - x| \leq ca_n \qquad \textit{untuksemua } n \geq m,$$

maka$\lim(x_n) = x$.

Bukti.Diambil$\varepsilon > 0$, maka $\frac{\varepsilon}{c} > 0$. Karena $\lim(a_n) = 0$, makaterdapat$K(\varepsilon/c) \in N$ sedemikian hinggga untuk setiap$n \geq K(\varepsilon/c)$ berlaku $|a_n - 0| < \varepsilon/c$. Akibatnya untuk setiap $n \geq K(\varepsilon/c)$ berlaku $|x_n - x| \leq c|a_n| < c.\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$atau$|x_n - x| < \varepsilon$. Terbukti bahwa $\lim(x_n) = x$.

Contoh 2.1.11.Jika$a > 0$, tunjukkanbahwa$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+na} = 0$.

Jawab.Karena$a > 0$, maka $0 < na < 1 + na$ yang berakibatbahwa

$$0 < \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} = \frac{1}{n}.\frac{1}{a} \qquad \text{untuk setiap } n \in N.$$

Diperoleh

$$\left|\frac{1}{1+na} - 0\right| = \left|\frac{1}{1+na}\right| < \frac{1}{n}.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.\left|\frac{1}{n}\right| \qquad \text{untuk setiap } n \in N.$$

Karenatelahdiketahuibahwa$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, maka menurut Teorema 2.1.10 dan dengan mengambil $c=\frac{1}{a}>0$ berakibat bahwa $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+na}=0$

SOAL LATIHAN SUBBAB 2.1

1. Tuliskanlimabilanganpertamadaribarisan(x_n)untuk$x_n$berikut.

   (a) $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

   (b) $x_n=\frac{1}{n^2+2}$.

2. Tentukanrumuske-n untuk barisan berikut.

   (a) $5, 7, 9, 11, \ldots$

   (b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

3. Untuksebarang$b\in R$, buktikanbahwa$\lim\left(\frac{b}{n}\right)=0$.

4. Tunjukkan (menggunakandefinisi limit barisan).

   (a) $\lim\left(\frac{2n}{n+1}\right)=2$

   (b) $\lim\left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)=\frac{1}{2}$.

5. Tunjukkanbahwa$\lim(x_n)=0$jikadanhanyajika$\lim(|x_n|)=0$.

6. Tunjukkanbahwajika$x_n\geq 0$ untuk semua $n\in N$ dan $\lim(x_n)=0$, maka $\lim\left(\sqrt{x_n}\right)=0$.

7. Buktikanbahwajika$\lim(x_n)=x$ dan jika $x>0$, maka terdapat $M\in N$ sedemikian hingga $x_n>0$ untuk semua $n\geq M$.

8. Tunjukkanbahwa$\lim\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=0$.

9. Tunjukkanbahwa$\lim\left(\frac{n^2}{n!}\right)=0$.

10. Jika$\lim(x_n)=x>0$, tunjukkan bahwa terdapat $K\in N$ sedemikian hingga jika $n\geq K$, maka $\frac{1}{2}x<x_n<2x$

2.2. Teorema-teorema Limit

Padasubbabiniakandibahasmengenaibeberapateorema yang berkaitandengan limit padabarisanbilangan real, sepertibarisanterbatasdankekonvergenanbarisan.

Definisi 2.2.1. Barisanbilangan real $X=(x_n)$ dikatakan**terbatas**jikaterdapatbilangan real $M>0$ sedemikianhingga $|x_n|\leq M$untuksemua$n\in$ N.

Olehkarenaitu, barisan (x_n) terbatasjikadanhanyajikahimpunan $\{x_n : n\in N\}$ merupakan subset terbatasdalam R.

Teorema 2.2.2. *Jika*$X=(x_n)$ *konvergen, maka* $X=(x_n)$ *terbatas.*

Bukti. Diketahui X = (x_n) konvergen, misalkankonvergenke x. diambil $\varepsilon = 1$, maka terdapat $K \in$ N sedemikianhinggauntuksetiap $n \geq K$berlaku | $x_n - x$ | < 1.

Menggunakanakibatketaksamaansegitiga, maka |x_n| - |x | <1 atau | x_n |<1+ | x | untuksemua $n \geq K$.

Namakan $M = max$ { $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, | x |+ 1 } , maka | $x_n \leq M$, untuksemua $n \in$ N. Jadi, terbukti bahwa X = (x_n) terbatas.

Teorema 2.2.3. *Jika* $X = (x_n) \to x$, $Y = (y_n) \to y$ *,dan* $c \in R$ *, maka*

(i) $X \pm Y \to x + y$.

(ii) $X . Y \to xy$.

(iii) $cX \to cx$.

Bukti.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $X = (x_n) \to$ maka terdapat $n_0 \in$ N sedemikian hingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku | $x_n - x$ | $< \frac{\varepsilon}{2}$. karena $Y = (y_n) \to y$, maka

terdapat $n_1 \epsilon$ N sedemikian hingga untuk setiap $n \geq n_1$ berlaku

$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pilih n_2 = max $\{n_0, n_1\}$, maka akibatnya untuk $n \geq n_1$ berlaku

$|x_n + y_n - (x - y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)|$

$\leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $(x_n + y_n)$ konvergen ke x + y.

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa $(x_n - y_n)$ konvergen ke x-y. Jadi terbukti bahwa X ± Y → x + y.

(iii) Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat K ϵ sedemikian hingga untuk setiap n ≥ K berlaku $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$. Diketahui

$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy|$

$\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy|$

$= |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|$.

Karena $(x_n) \to$ x maka (x_n) terbatas, akibatnya terdapat $M_1 > 0$ sedemikian hingga $(x_n($ $\leq M_1$, untuk semua $n \epsilon$ N. Namakan M = max$\{M_1, |y|\}$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $(x_n) \to$ x , maka terdapat $K_1 \epsilon$ N sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_1$ berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Karena$(y_n) \to y$, maka terdapat $K_2 \epsilon$ N sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_2$ berlaku $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Namakan K = max$\{K_1, K_2\}$, maka untuk setiap $n > K$ berlaku

$|x_n y_n - xy| \leq |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|$

$< M . \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} . M = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in$ N sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$. Dengan kata lain terbukti bahwa $X.Y \to xy$

(iii) Ambil sebarang $\mathcal{E} > 0$. Karena $(X_n) \to x$, maka terdapat K $\in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap n $\geq$ K berlaku $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |cx_n - x| &= |cx_n - x_n + x_n - x| \\ &\leq |cx_n - x_n| + |x_n - x| \\ &= |x_n||c-1| + |x_n - x| \end{aligned}$$

Karena $(x_n) \to x$, maka (x_n) terbatas , yaitu terdapat M > 0 sedemikian hingga $|x_n| \leq M$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya

$$|x_n||c-1| + |x_n - x| < M.|c-1| + \frac{\varepsilon}{2} = (M.|c-1|) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat K $\in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|cx_n - x| < \varepsilon$. Dengan kata lain, terbukti bahwa $cX \to cx$

Teorema 2.2.4. Jika $X = (x_n) \to x$ dan$Z = (z_n) \to z \neq 0$ dengan $z_n \neq 0$ untuk semua n $\in \mathbb{N}$, maka

$$\frac{X}{Z} = \left(\frac{X_n}{Z_n}\right) \to \frac{x}{z}$$

Bukti. Terlebih dahulu harus dibuktikan bahwa $\frac{1}{Z} = \left(\frac{1}{z_n}\right) \to \frac{1}{z}$. Diambil $\alpha = \frac{1}{2}|z|$, maka $\alpha > 0$. Karena $\lim(z_n) = z$, maka terdapat $K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_1$ berlaku $|z_n - z| < \alpha$.Menggunakan akibat Ketaksamaan Segitiga bahwa $-\alpha \leq -|z_n - z| \leq |z_n| - |z|$ untuk $n \geq K_1$, yang berarti $\frac{1}{2}|z| = |z| - \alpha \leq |z_n|$untuk $n \geq K_1$. Oleh karena $\frac{1}{|z_n|} \leq \frac{2}{|z|}$ untuk $n \geq K_1$, maka diperoleh

$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z - z_n}{z_n z}\right| = \frac{1}{|z_n z|} \leq \frac{2}{|z|^2}|z - z_n|$.

Selanjutnya, diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K_2 \in N$ sedemikian hingga jika $n \geq K_2$, maka $|z_n - z| < \frac{1}{2}\varepsilon|z|^2$. Jika diambil $K(\varepsilon) = \max\{K_1, K_2\}$, maka

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| < \varepsilon \quad \text{untuk semua } n \geq K(\varepsilon).$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa $\lim\left(\frac{1}{z_n}\right) = \frac{1}{z}$ atau $\left(\frac{1}{z_n}\right)$

Konvergen ke $\frac{1}{z}$. Menggunakan Teorema 2.2.3(ii) dan dengan mengambil Y sebagai barisan $\left(\frac{1}{z_n}\right)$, maka $X.Y = \left(\frac{x_n}{z_n}\right) \to x\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{z}$.

Teorema 2.2.5. Jika $X = (x_n)$*barisan bilangan real dengan* $x_n \geq 0$ *untuk semua* $n \in N$ *dan* $(x_n) \to x$, *maka* $x \geq 0$.

Bukti. Diambil $\varepsilon = -x > 0$. Karena $(x_n) \to x$, maka terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$|x_n - x| < \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon$$
$$\leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$$
$$\leftrightarrow x - (-x) < x_n < x + (-x)$$
$$\leftrightarrow 2x < x_n < 0.$$

Kontradiksi dengan pernyataan bahwa $x_n \geq 0$, untuk semua $n \in N$. Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah $x \geq 0$.

Teorema 2.2.6. Jika $(x_n) \to x$, $(y_n) \to y$, dan $x_n \leq y_n$ untuk semua $n \in N$, maka $x \leq y$.

Bukti. Diberikan $z_n = y_n - x_n$ sehingga $Z = (z_n) = Y - X$ dan $z_n \geq 0$ untuk semua $n \in N$. Menggunakan Teorema 2.2.5 dan 2.2.3 diperoleh bahwa

$$0 < \lim Z = \lim (y_n) - \lim (x_n) \text{ atau } \lim (x_n) \leq \lim (y_n)$$

Jadi, terbukti bahwa $x \leq y$

Teorama 2.2.7. Jika $X=(x_n)$ konvergen ke x dan jika $a \leq x_n \leq b$ untuk semua $n \epsilon N$, maka $a \leq x \leq b$

Bukti. Diberikan Y barisan konstan $(b, b, b, \ldots)$. Menggunakan Teorema 2.2.6 diperoleh bahwa $\lim X \leq \lim Y = b$. Dengan cara yang sama diperoleh $a \leq \lim X$. Jadi, terbukti bahwa $a \leq \lim X \leq b$ atau $a \leq x \leq b$.

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang menyatakan bahwa jika suatu barisan Y berada (terselip) diantara dua barisan yang konvergen ke titik yang sama, maka Y juga konvergen ke titik yang sama.

Teorema 2.2.8. (Squeeze Theorem) *Diberikan barisan bilangan real* $X=(x_n)$ $Y=(y_n)$, dan $Z=(z_n)$ *sedemikian hingga*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \textit{ untuk semua } n \epsilon N$$

dan $\lim (x_n) = \lim (z_n)$. *Maka Y konvergen dan*

$$\text{Lim } (x_n)=\lim(y_n) = \lim (z_n).$$

Bukti. Misalkan $w:=\lim(x_n) = \lim (z_n)$. Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - w| < \varepsilon$ dan $|z_n - w| < \varepsilon$, atau dengan kata lain $-\varepsilon < x_n - w < \varepsilon$ dan $-\varepsilon < z_n - w < \epsilon$. Karena $x_n \leq y_n \leq z_n$, maka $x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w$

Akibatnya diperoleh bahwa $-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon$. Karena berlaku untuk semua $n \geq K$ dan $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa $\lim (y_n) = w$.

Teorema 2.2.9. *Jika* $X = (x_n) \to x$, *maka* $|X| = (|x_n|) \to |x|$.

Bukti.Diberikan$\varepsilon > 0$.Karena$X = (x_n) \to x$, makaterdapat$K \in \mathbb{N}$sedemikianhinggauntuksetiap$n \geq K$berlaku$|x_n - x| < \varepsilon$.MenggunakanakibatKetaksamaanSegitiga, diperolehbahwauntuksetiap$n \in \mathbb{N}$berlaku

$$\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x| < \varepsilon .$$

Jadi, diperolehbahwa$\big||x_n| - |x|\big| < \varepsilon$, atau$|X| = (|x_n|) \to |x|$.

Terorema 2.2.10.*Jika$X = (x_n) \to x$dan$x_n \geq 0$, makabarisanbilangan real positif$(\sqrt{x_n}) \to \sqrt{x}$.*

Bukti. Menurutteorema 2.2.5 diperolehbahwa$x \geq 0$.Akan ditunjukkanbahwateoremabenaruntuk$x = 0$dan$x > 0$.

Kasus I: Jika$x \geq 0$, diberikan$\varepsilon > 0$. Karena$(x_n) \to x = 0$, makaterdapat$K \in \mathbb{N}$sedemikianhinggauntuksetiap$n \geq K$berlaku

$$0 \leq x_n = x_n - 0 < \varepsilon^2.$$

Sehinggadiperolehbahwa$0 \leq \sqrt{x_n} < \varepsilon$.Karenaberlakuuntuksetiap$\varepsilon > 0$, makaterbuktibahwa$(\sqrt{x_n}) \to \sqrt{x}$.

Kasus II: Jika$x > 0$, maka$\sqrt{x} > 0$. Diberikan$\varepsilon > 0$, makaterdapat$K \in \mathbb{N}$sedemikianhinggauntuksetiap$n \geq K$berlaku$|x_n - x| < \varepsilon$.Perhatikanbahwa

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x_n}-\sqrt{x})(\sqrt{x_n}+\sqrt{x})}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}} = \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}}.$$

Karena$\sqrt{x_n} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$, makadiperoleh

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{x}} .$$

Karenaberlakuuntuksetiap$\varepsilon > 0$, makaterbuktibahwa$(\sqrt{x_n}) \to \sqrt{x}$.

Teorema 2.2.11.*Jika(x_n)barisanbilangan real (tegas) dengan*$\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L$ *(ada) dan$L < 1$, maka (x_n)konvergendan*$\lim(x_n) = 0$.

Bukti.**Dipilih**$r \in \mathbb{R}$sedemikianhingga$L < r < 1$.Diambil$\varepsilon = r - L > 0$.Karena$\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L$, makaterdapat$K \in \mathbb{N}$sedemikianhinggauntuksetiap$n \geq K$berlaku$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| < \varepsilon$. Karena

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - |L| \leq \left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| ,$$

maka

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - |L| < \varepsilon .$$

Sehinggadiperoleh

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - L < \varepsilon \iff \frac{x_{n+1}}{x_n} < \varepsilon + L < L + r - L = r \iff x_{n+1} < x_n r\ ,$$

Jadi, untuksetiap$n \geq K$berlaku

$$0 < x_{n+1} < x_n r < x_{n-1} r^2 < x_{n-2} r^3 < \cdots < x_k r^{n+1-k} = \frac{x_k}{r^k} r^{n+1}\ .$$

Jikadiambil$\frac{x_k}{r^k}$, makadiperoleh

$$0 < x_{n+1} < c r^{n+1} \text{untuksemua} n \geq K.$$

Mengingatbahwa$\lim(r^n) = 0$(sebab$0 < r < 1$), maka

$$\lim(r^n) = 0 \Rightarrow \lim\ (r^{n+1}) = 0 \Rightarrow \lim(x_{n+1}) = 0 \Rightarrow \lim(x_n) = 0.$$

Jadi, terbuktibahwa(x_n)konvergendan$\lim(x_n) = 0$.

SOAL LATIHAN SUBBAB 2.2

1. Tentukanapakahbarisanberikutkonvergenataudivergen.

   (a) $x_n := \frac{n^2}{n+1}$

   (b) $x_n := \frac{2n^2+3}{n^2+1}$

   (c) $x_n := \frac{(-1)^n n}{n+1}$

2. Tunjukanbahwajika$X$ dan Y barisan bilangan real sedemikian hingga X dan $X +$ konvergen, maka Y konvergen.
3. Tunjukkanbahwabarisan$((-1)^n n^2)$ tidak konvergen.
4. Diberikan$y_n :=\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ untuk $n \in$ N. Tunjukkan bahwa (y_n) dan $(\sqrt{n} y_n)$ konvergen. Carilah nilai limitnya.
5. Jika$> 0, b > 0$, tunjukkan bahwa $\lim\left(\sqrt{(n + a(n+b))} - n\right) = \frac{a+b}{2}$.
6. GunakanTeorema Squeeze (2.2.8) untukmenentukan limit barisanberikut.

   (a) $\left(n^{1/n^2}\right)$. (b) $\left((n!)^{1/n^2}\right)$.

7. Diberikansebuahcontohbarisankonvergen(x_n) dengan $\lim\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$=1
8. Diberikanbarisanbilangan real positif$X = (x_n)$ dengan $\lim\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = L > 1$.

   Tunjukkan bahwa X tidak terbatas dan tidak konvergen.

9. Diberikan(x_n) barisan konvergen (y_n) sedemikian hingga untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $M \in$ N sedemikian hingga untuk setiap $n \geq M$berlaku $|x_n - y_n| < \varepsilon$. Apakah (y_n)konvergen ?
10. Tunjukkanbahwajika(x_n) dan (y_n) barisan konvergen, maka barisan (u_n) dan (v_n) yang didefinisikan dengan $u_n :=$ max$\{x_n, x_y\}$ dan $v_n :=$ min$\{x_n, x_y\}$ konvergen.

2.3. BarisanMonoton

Berikut ini diberikan pengertian mengenai barisan naik dan turun monoton.

Definisi 2.3.1. Diberikan barisan bilangan real X=(X_n).

(i) Barisan X dikatakan **naik** (increasing) jika$x_n \leq x_{n+1}$ untuk semua n ϵ N

(ii) Barisan X dikatakan **naik tegas** (strictly increasing) jika $x_n < x_{n+1}$ untuk semua n ϵ N

(iii) Barisan X dikatakan **turun** (decreasing) jika$x_n \geq x_{n+1}$ untuk semua n ϵ N

(iv) Barisan X dikatakan **turun tegas** (strictly decreasing) jika$x_n > x_{n+1}$ untuk semua n ϵ N

Definisi 2.3.2. Barisan X = (X_n) dikatakan **monoton** jika berlaku salah satu X naik atau X turun.

Contoh 2.3.3.

(a) Barisanberikutininaik (monoton).

(i) (1,2,3,4,..., n,...).

(ii) (1,2,2,3,3,3,...).

(iii) $(a,a^2,a^3,a^4, ...,a^n,...)$.

(b) Barisanberikutiniturun (momoton).

(i) $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\right)$.

(ii) $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\dots,\frac{1}{2^{n-1}},\dots\right)$.

(iii) $(b,b^2,b^3,b^4, ...,b^n,...)$. jika $0 < b < 1$

(c) Barisanberikutinitidakmonoton.

(i) $(+1,-1,+1,...,(-1)^{n+1},...)$.

(ii) (-1,+2,-3,+4,...).

2.3.4. Teorema Konvergensi Monoton

(a) *Jika* $X = (x_n)$ *naik* (*monoton*) *dan terbatas ke atas, maka* $X = (x_n)$ *konvergen dengan*

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in N\}.$$

(b) *Jika* $X = (x_n)$ *turun* (*monoton*) *dan terbatas ke bawah, maka* $= (x_n)$ *konvergen dengan*

$$\lim(x_n) = \inf\{x_n : n \in N\}.$$

Bukti.

(a) Karena $X = (x_n)$ terbatas ke atas, maka terdapat $M \in N$ sedemikian hingga $x_n \leq M$ untuk semua $n \in N$. Namakan $A = \{x_n : n \in N\}$, maka $A \subset R$, terbatas ke atas dan tidak koson. Menurut Sifat Lengkap R, maka supremum A ada, namakan $x = \sup A$. Diambil $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K \in N$ sedemikian hingga $x - \varepsilon < x_k \leq x$. karena X naik monoton, maka untuk $n \geq K$ berlaku

$$x - \varepsilon < x_k \le x_n \le x < x + \varepsilon$$

Atau

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Jadi, terbukti bahwa $X = (x_n)$ konvergen ke $x = \lim(x_n) = \sup\{x_n : n \epsilon N\}$.

(b) Gunakan cara yang hampei sama dengan pembuktian (a).

Contoh 2.3.5. diketahui barisan (y_n) dengan $y_1 = 1$ dan $y_{n+1} = \sqrt{2 + y_n}$, $n \ge 1$. Apakah (y_n) konvergen ? Jika ya, tentukan (y_n).

Jawab. Akan ditunjukkan menggunakan induksi bahwa (y_n) naik monoton.

Untuk $n = 1$, diperoleh $y_2 = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3} \ge 1$ (benar). Misalkan benar untuk $n = k$, yaitu $y_{k+1} = \sqrt{2 + y_k}$, $y_{k+1} \ge y_k$. Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$, yaitu $y_{k+2} = \sqrt{2 + y_{k+1}} \ge \sqrt{2 + y_k} = y_{k+1}$.

Berarti benar untuk $n = k+1$. Jadi, menurut induksi (y_n) naik monoton. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa (y_n) terbatas ke atas (oleh 3), yaitu $y_n \le 3$, untuk semua $n \in$ N. Untuk $n = 1$ benar, sebab $y_1 = 1 \le 3$. Misalkan benar untuk $n = k$, yaitu $y_k \le 3$. Maka $y_{k+1} = \sqrt{2+y_k} \le \sqrt{2+3} = \sqrt{5} \le 3$ yang berarti benar untuk $n = k+1$. Jadi, menurut induksi terbukti bahwa $y_n \le 3$, untuk semua $n \in$ N. Karena (y_n) naik monoton dan terbatas ke atas, maka menurut Teorema 2.3.4 barisan (y_n) konvergen. Misalkan $y = \lim(y_n)$, maka diperoleh

$$y = \sqrt{2 + y} \Leftrightarrow y^2 = 2 + y \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)(y + 1) = 0.$$

Diperoleh $y = 2$ atau $y = -1$. Untuk $y = -1$ jelas tidak mungkin, sebab $1 \le y_n \le 3$ untuk semua $n \in$ N. Jadi, terbukti bahwa (y_n) konvergen dan $\lim(y_n) = 2$.

SOAL LATIHAN SUBBAB 2.3

1. Diberikan $x_1 > 1$ dan $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ untuk $n \in$ N. Tunjukkan bahwa (x_n) terbatas dan monoton. Carilah nilai limitnya.
2. Diberikan $x_1 \ge 2$ dan $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}$ untuk $n \in$ N. Tunjukkan bahwa (x_n) turun dan terbatas ke bawah oleh 2. Carilah nilai limitnya.
3. Diberikan $A \subset$ R tak berhingga yang terbatas ke atas dan misalkan $u = \sup A$. Tunjukkan bahwa terdapat barisan naik (x_n) dengan $x_n \in A$ untuk semua $n \in$ N sedemikian hingga $u = \lim(x_n)$.
4. Tentukan apakah barisan (y_n) konvergen atau divergen, dengan

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{untuk } n \in \text{N}.$$

5. Diberikan $x_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ untuk setiap $n \in \mathrm{N}$. Buktikan bahwa (x_n) naik dan terbatas, sehingga (x_n) konvergen. (*Petunjuk* : *Jika* $k \geq 2$, *maka* $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$).

6. Tentukan konvergensi dan hitunglah limit barisan berikut.

(a) $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ (b) $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\right)$

(c) $\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right)$ (d) $\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$

2.4 Barisan Bagian

Pada bagian ini akan diberikan konsep barisan bagian (*subsequences*) dari suatu barisan bilangan real.

Deinisi 2.4.1. Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$ dan diberikan barisan bilangan asli naik tegas $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Barisan $X' = (x_{n_k})$ dengan disebut dengan **barisan bagian** atau **sub barisan** (*subsequences*) dari *X*.

Contoh 2.4.2. Diberikan $X := \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$.

(i) Barisan $X_1' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots\right)$ merupakan barisan bagian dari *X*.

(ii) Barisan $X_2' = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots\right)$ merupakan barisan bagian dari *X*.

(iii) Barisan $X_3' = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$ bukan barisan bagian dari *X*, sebab $n_2 < n_1$.

Teorema 2.4.3. Jika $X = (x_n)$ konvergen ke x, maka setiap barisan bagian $X' = (x_{nk})$ dari X juga konvergen ke x.

Bukti. Diambil $\varepsilon > 0$. Karena $(x_n) \rightarrow x$, maka terdapat $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Karena untuk setiap $n \in N$ berlaku $n_{k+1} \geq n_k$, maka untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $n_k \geq k \geq K(\varepsilon)$. Sehingga

$$|x_{nk} - x| < \varepsilon .$$

Terbukti bahwa $X' = (x_{nk})$ konvergen ke x.

Teorema 2.4.4. Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$, maka pernyataan berikut ini ekuivalen.

(i). Barisan $X = (x_n)$ tidak konvergen ke $x \in R$.

(ii). Ada $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian hingga untuk sebarang $k \in N$, terdapat $n_k \in N$ sedemikan hingga $n_k \geq k$ *dan* $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_{0.}$

(iii). Ada $\varepsilon_0 > 0$ dan suatu barisan bagian $X' = (x_{nk})$ sedemikian hingga $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $k \in N$.

Bukti.

$(i) \Rightarrow (ii)$ *Jika* (x_n) tidak konvergen ke x, maka untuk suatu $\varepsilon_0 > 0$ tidak mungkin ditemukan $k \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n_k \geq k$ berlaku $|x_{nk} - x| < \varepsilon_0$. Akibatnya tidak benar bahwa untuk setiap $k \in N$, $n \geq k$ memenuhi $|x_{nk} - x| < \varepsilon_0$. Dengan kata lain, untuk setiap $k \in N$ terdapat $n_k \in N$ sedemikian hingga $n_k \geq k$ dan $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$.

(ii) ⇒ (iii) Diberikan$\varepsilon_0 > 0$ sehingga memenuhi (ii) dan diberikan $n_1 \in N$ sedemikian hingga $n_1 \geq 1$ dan $|X_{n_1 - x}| \geq \varepsilon_0$. Selanjutnya diberikan $n_2 \in N$ sedemikian hingga $n_2 > n_1$dan $|X_{n_2 - x}| \geq \varepsilon_0$. Demikian seterusnya sehingga diperoleh suatu barisan bagian$X^1 = (x_{n_1})$ sehingga berlaku $|X_{n_1 - x}| \geq \varepsilon_0$untuk semua k $\in N$.

iii) ⇒ (i) misalkan$X = (x_n)$mempunyai barisan bagian $X^1 = (x_{n_1})$ yang memenuhi sifat (iii). Maka X tidak konvergen ke x, sebab jika konvergen ke x, maka $X^1 = (x_{n_1})$juga konvergen ke x. Hal initidakmungkin, sebab$X^1 = (x_{n_1})$ tidak berada dalam persekitaraan $V_{\varepsilon_0(x)}$.

Teorema 2.4.5.(KriteriaDivergensi)jikabarisanbilangan real $X = (x_0)$ memenuhi salah satu dari sifat berikut, maka barisan X divergen.

(i) X mempunyaiduabarisanbagiankonvergen$X^1 = (x_{n_1})$ dan $X^n = (x_{r_1})$ dengan limit keduanya tidak sama.

(ii) X tidakterbatas.

Contoh 2.4.6.Tunjukkanbahwabarisan$(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \ldots)$divergen.

Jawab.Namakanbarisan di atasdengan$Y = (y_n)$, dengan $y_n = \frac{1}{n}$ jika n genap, dan $y_n = n$ jika n ganjil.Jelas bahwa Y tidak terbatas.Jadi, barisan $Y = (y_n)$divergen.

Berikut ini sebuah teorema yang menyatakan bahwa barisan bilangan real $X = (x_n)$ pasti mempunyai barisan bagian yang monoton. Untuk membuktikan teorema ini,

diberikan pengertian puncak (peak), $x_n$disebut puncak jika $x_m = x_n$untuk semua n sedemikian hingga $n \geq m$. Titik x_m tidak pernah didahului oleh sembarang

Elemen barisan setelahnya. Perhatikan bahwa barisan pada barisan yang menurun, setiap elemen adalah puncak, tetapi pada barisan yang naik, tidak ada elemen yang menjadi puncak.

2.4.7. TeoremaBarisanBagianMonoton Jika$X = (x_n)$barisan bilangan real, maka terdapat barisan bagian dari X yang monoton.

Bukti.Pembuktian dibagi menjadi dua kasus, yaitu X mempunyaitakhinggabanyakpuncak, dan X mempunyaiberhinggabanyakpuncak.

Kasus I: X mempunyaitakhinggabanyakpuncak. Tulissemuapuncakberurutannaik, yaitu$x_{m_1}, x_{m_{2,\dots,}} x_{m_{4,\dots}}$. Maka$x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq \cdots \geq x_{m_4}, \dots$. oleh karena itu, (x_{m_1}) merupakan bagian barisan yang turun (monoton).

Kasus II: X mempunyaiberhinggabanyakpuncak .Tulissemuapuncakberurutannaik, yaitu$x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_4}, \dots$ .Misalkan $s_1 \coloneqq m_r + 1$ adalah indeks pertama dari puncak yang terakhir. Karena x_{s_1} bukan puncak, maka terdapat $s_1 > s_2$ sedemikianhingga$x_{s_1} < x_{s_2}$. Jika proses ini diteruskan, diperoleh barisan bagian (x_{s_1}) yang naik (monoton).

Teorema 2.4.8 (Bolzano-Weierstrass) Setiapbilangan real yang terbataspastimemuatbarisanbagian yang konvergen.

Bukti. Diberikanbarisanbilangan real terbatas$X = (x_n)$. Namakan $S = \{x_n : n \in N\}$ range barisan, maka S mungkin berhingga atau tak berhingga.

Kasus I: Diketahui S berhingga. Misalkan$= \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$, maka terdapat $m \in N$ dengan $1 \leq m \leq 1$ dan barisan$(r_1 : k \in N)$ dengan $r_{1<} r_{2<} r_{3<\dots}$ sehingga $x_{r1} = x_{r2} = \cdots = x_m$, hal ini berarti terdapat barisan bagian $(x_{r1} : k \in N)$ yang konvergen ke x_m .

Kasus II: Karena S takberhinggadanterbatas, maka S mempunyaititik cluster atautitik limit, namakan x titik limit S. Misalkan$U_k = \left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right)$persekitarantitik x.

Untuk $k = 1$, makaterdapat $x_{r_1} \in S \cap U_1, x_{r_1} \neq x$ sedemikianhingga $|x_{r_1} - x| < 1$.

Untuk $k = 2$,makaterdapat $x_{r_2} \in S \cap U_2, x_{r_2} \neq x$ sedemikianhingga $|x_{r_2} - x| < \frac{1}{2}$.

Untuk $k = 3$, makaterdapat $x_{r_3} \in S \cap U_3, x_{r_3} \neq x$ sedemikianhingga $|x_{r_3} - x| < \frac{1}{3}$.

Demikianseterusnya, sehinggadiperoleh:

Untuk $k = n$,makaterdapat $x_{r_n} \in S \cap U_n, x_{r_n} \neq x$ sedemikianhingga $|x_{r_n} - x| < \frac{1}{n}$.

Ambil $\in > 0$. MenurutSifat Archimedes, makaterdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikianhingga $\frac{1}{K} < \in$.

Makauntuksetiap $n \geq K$ berlaku $\left| x_{r_n} - x \right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \in$. Terbuktibahwa $\left(x_{r_n} \right)$ konvergenke x dengan $\left(x_{r_n} \right)$ barisanbagian $\left(x_n \right)$.

Teorema 2.4.9. *Diberikanbarisanbilangan real terbatas $X = \left(x_n \right)$ dandiberikan $x \in \Re$ yang mempunyaisifatbahwasetiapbarisanbagiandari X konvergenke x. Makabarisan X konvergenke x.*

Bukti. Misalkan $M > 0$ adalahbatasdaribarisan X sehingga $\left| x_n \right| \leq M$ untuksemua $n \in \mathbb{N}$. Andaikan X tidakkonvergenke x, makamenggunakanTeorema 2.4.4 terdapat $\in_0 > 0$ danbarisanbagian $X^{'} = \left(x_{n_k} \right)$ sedemikianhingga $\left| x_{n_k} - x \right| \geq \in_0$ untuksemua $K \in \mathbb{N}$. Karena $X^{'}$ barisanbagiandari X, maka M jugabatasdari $X^{'}$. MenggunakanTeorema Bolzano-Weierstrassberakibatbahwa $X^{'}$ memuatbarisanbagian $X^{''}$. Karena $X^{''}$ jugabarisanbagiandari X, maka $X^{''}$ jugakonvergenke x. Dengandemikian, akanselaluberadadalampersekitaraan $V_{\in_0}(x)$. Timbulkontradiksi, yang benaradalah X selalukonvergenke x.

SOAL LATIHAN SUBBAB 2.4

1. Tunjukkanbahwabarisanberikutinidivergen.

   a) $\left(1 - (-1)^n + \frac{1}{n} \right)$.

   b) $\left(\sin \frac{n\pi}{4} \right)$.

2. Berikancontohbarisantakterbatas yang memuatbarisanbagiankonvergen.
3. Dierikanbarisan $X = \left(x_n \right)$ dan $Y = \left(y_n \right)$. Diberikanbarisan $Z = \left(z_n \right)$ dengandefinisi $z_1 := x_{1,} z_2 := y_1, ..., z_{2n-1} := x_n, z_{2n} := y_n$. Tunjukkanbahwa Z konvergenjikadanhanyajika X dan Y konvergendan $\lim \left(x_n \right) = \lim \left(y_n \right)$.
4. Tentukankonvergensidan limitbarusanberikut.

   a) $\left(\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^2 \right)$.

   b) $\left(\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{2n^2} \right)$.

5. Hitunglah limit barisanberikut.

a) $\left((3n)^{\frac{1}{2n}}\right)$.

b) $\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n}\right)$.

6. Misalkansetiapbarisanbagiandari $X = (x_n)$ mempunyaisuatubarisanbagian yang konvergenke 0. Tunjukkanbahwa $\lim(x_n) = 0$.
7. Diberikanbarisanterbatas (x_n) danuntuksetiap $n \in \mathrm{N}$ diberikan $s_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$ dan $S := \inf\{s_n\}$. Tunjukkanbahwaterdapatbarisanbagiandari (x_n) yang kovergenke S.
8. Jika $x_n \geq 0$ untuksemua $n \in \mathrm{N}$ dan $\lim\left((-1)^n x_n\right)$ ada, tunjukkan (x_n) konvergen.
9. Tunjukkanbahwajika (x_n) terbatas, makaterdapatbarisanbagian (x_{n_k}) sedemikianhingga $\lim\left(\frac{1}{x_{n_k}}\right) = 0$.
10. Diberikanbarisanterbatas (x_n) dan $s := \sup\{x_n : n \in \mathrm{N}\}$. Tunjukkanbahwajika $s \notin \{x_n : n \in \mathrm{N}\}$, makaterdapatbarisanbagiandari (x_n) yang konvergenke s.

2.5. Barisan Cauchy

Definisi 2.5.1. Barisan bilangan real $X = (x_n)$ disebut **Barisan Cauchy** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $H(\varepsilon) \epsilon$ N sedemikian hingga untuk setiap n,m ϵ N dengan $n,m \geq H(\varepsilon)$, berlaku

$|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Contoh 2.5.2. Barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, dapat dipilih $H = H(\varepsilon) \epsilon N$ sedemikian hingga $H > \frac{2}{\varepsilon}$. Maka jika $n,m \geq$ H , diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan dengan cara yang sama diperoleh $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu, jika $n,m \geq H(\varepsilon)$, maka

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka dapat disimpulkan bahwa $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Lemma 2.5.3. *jika $X = (x_n)$ barisan bilangan real yang konvergen, maka X merupakan barisan Cauchy.*

Bukti. Misalkan x:=lim X. Diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K(\varepsilon/2) \epsilon$ N sedemikian hingga jika $n \geq K(\varepsilon/2)$, maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu, jika $H(\varepsilon)$:=$K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ dan jika $n,m \geq H(\varepsilon)$, maka diperoleh

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)|$$

$$= |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa (x_n) barisan Cauchy.

Lemma 2.5.4. *Jika X=(x_n) barisan Cauchy, maka X terbatas.*

Bukti. Diketahui X=(x_n) barisan Cauchy. Diberikan $\varepsilon \coloneqq 1$. Jika H:=$H(1)$ dan $n \leq H$,maka $|x_n - x_H| < 1$. Selanjutnya, menggunakan Ketaksamaan Segitiga,diperoleh $|x_n| \leq |x_H| + 1$ untuk semua $n \epsilon$N. Namakan

$$M := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{H-1}|, |x_H| + 1\},$$

Maka diperoleh $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \epsilon N$. Jadi, terbukti bahwa X terbatas.

Teorema 2.5.5.(Kriteria Konvergensi Cauchy) *Barisan bilangan real X=(x_n) konvergen jika dan hanya jika X=(x_n) barisan Cauchy.*

Bukti

=> Jelas (Lemma 2.5.3).

<= Diketahui X=(x_n) barisan Cauchy. Diambil $\varepsilon > 0$, maka terdapat H=$H(\varepsilon) > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $n,m \epsilon N$ dengan $n,m \geq H$ berlaku $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Karena X barisan Cauchy,

maka X terbatas, sehingga X memuat barisan bagian X'=(x_{n_k}) yang konvergen ke x^*. Oleh karena itu, terdapat $K \geq H$ dengan $K \epsilon \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ sedemikian hingga $|x_K - x^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Akibatnya untuk m = K diperoleh

$$|x_n - x^*| = |x_n - x_K + x_K - x^*|$$

$$\leq |x_n - x_K| + |x_K - x^*|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa barisan X =(x_n) konvergen.

Definisi 2.5.6. Barisan bilanngan real $X = (x_n)$ dikatakan kontraktif (*contractive*) jika terdapat konstanta C , dengan $0 < C < 1$ sedemikian sehingga

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - (x_n)|$$

Untuk semua $\epsilon\mathbb{N}$. Bilangan C disebut konstan dari barisan kontraktif.

Teorema 2.5.7. *Setiap barisan kontraktifmerupakan barisan Cauchy dan konvergen.*

Akibat 2.5.8. *Jika* $X = (x_n)$ *barisan kontraktif dengan konstanta* C ,$0 < C < 1$ *dan jika* $x^* = limX$ *, maka*

(i) $|x^* - x_n| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C}|x_2 - x_1|$

(ii) $|x^* - x_n| \leq \frac{C}{1-C}|x_n - x_{n-1}|$

SOAL LATIHAN SUBBAB 2.5.

1. Berikan sebuah contoh barisan terbatas yang bukan barisan Cauchy .
2. Tunjukan menggunakan definisi bahwa barisan berikut merupakan barisan Cauchy
   a. $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ b. $\left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$
3. Tunjukan menggunakan definisi bahwa barisan berikut bukan barisan Cauchy.
   a. $((-1)^n)$ b. $\left(n + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ c. $(\ln n)$
4. Diberikan barisan (x_n) dengan $= \sqrt{n}$, tunjukan bahwa $lim|x_{n+1} + x_n| = 0$, tetapi bukan barisan Cauchy .
5. Diberikan barisan Cauchy (x_n) sedemikian sehingga $x_n \epsilon \mathbb{Z}$ untuk setiap $n \epsilon \mathbb{N}$. Tunjukan bahwa (x_n) selalu konstan .
6. Jika $0 < r < 1$ dan $|x_{n+1} - x_n| < r^n$ untuk semua n ϵ N, tunjukan bahwa (x_n) merupakan barisan Cauchy.
7. Jika $y_1 < y_2$ adalah sebarang bilangan real dan $y_n = \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2}$ untuk $n > 2$, tunjukan bahwa (y_n) konvergen. Tentukan limitnnya.
8. Jika $x_1 > 0$ dan$x_{n-1} := (2 + x_n)^{-1}$ untuk $n \geq 1$, tunjukan bahwa (x_n) merupakan barisan kontraktif. Tentukan limitnya.

2.6. Sifat Barisan Divergen

Pada subab inidiberikan beberapa sifat dari suatu barisan bilangan real (x_n) yang mendekati atau menuju ke $\pm\infty$, yaitu $lim(x_n) = \pm\infty$ dan $lim(x_n) = -\infty$. Ingat bahwa barisan divergen adalah barisan yang tidak konvergen.

Definisi 2.6.1. Diberikan barisan bilangan real (x_n).

(i) Barisan dikatakan **mendekati** $+\infty$, ditulis $\lim(x_n) = +\infty$, jika untuk setiap $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ terdapat $K(\alpha)\epsilon\mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(a)$, maka $n_x > a$.

(ii) Barisan (x_n) dikatakan **mendekati** $-\infty$, ditulis $lim(x_n) = -\infty$, jika untuk setiap $\beta\epsilon\mathbb{R}$ terdapat $K(\beta)\epsilon\mathbb{N}$ sedemikian hingga jika $n \geq K(\beta)$, maka $x_n < \beta$.

Barisan (x_n) dikatakan **divergen proper** (tepat/tegas) jika $lim(x_n) = +\infty$ atau $lim(x_n) = -\infty$. Berikut ini diberikan contoh bahwa $im(n^2) = +\infty$.

Contoh 2.6.2. $\lim(n^2) = +\infty$. Jika $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian hingga $K(\propto) > \propto$, dan jika $n \geq K(\propto)$, maka diperoleh $n^2 \geq K(\propto)$, maka diperoleh $n^2 \geq n > \propto$.

Teorema 2.6.3. *Barisan bilangan real monoton merupakan barisan divergen proper jika dan hanya barisannya yidak terbatas.*

(a) Jika (x_n) *barisan naik tak terbatas, maka* $lim(x_n) = +\infty$.

(b) Jika (x_n) barisan turun tak terbatas, maka $lim(x_n) = -\infty$.

Bukti,

(a) Misalkan (x_n) barisan naik. Jika (x_n) terbatas, maka (x_n) konvergen. Jika (x_n) tidak terbatas, maka untuk sebarang $\alpha \in R$ terdapat $n(\propto) \in N$ sedemikian hingga $\propto < x_{n(\propto)}$. Tetapi karena (x_n) naik, diperoleh $\propto < x_n$ untuk semua $n \geq n(\propto)$. Karena $\propto$ sebarang, maka diperoleh bahwa $\lim(x_n) = +\infty$.

(b) Bukti hampir sama dengan (a).

Teorema 2.6.4. *Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n), dengan $x_n \leq y_n$ untuk semua $n \in N$.*

(a) Jika $lim(x_n) = +\infty$, maka $lim(y_n) = +\infty$.

(b) Jika $lim(y_n) = -\infty$, maka $lim(x_n) = -\infty$.

Bukti,

(a) Jika $\lim(x_n) = +\infty$ dan jika diberikan $\alpha \in R$, maka terdapat $K(\propto) \in N$ sedemikian hingga jika $n \geq K(\propto)$, maka $\propto < x_n$. Karena diketahui $x_n \leq y_n$ untuk semua $n \in N$, maka $\propto < y_n$ untuk semua $n \geq K(\propto)$. Karena $\propto$ sebarang, maka $\lim(y_n) = +\infty$.

(b) Bukti hampir sama dengan (a).

Teorema 2.6.5. *Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n), dan untuk suatu $L \in R, L > 0$ diperoleh*

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = L.$$

Maka $lim(x_n) = +\infty$ jika dan hanya jika $lim(y_n) = +\infty$.

Bukti, Diketahui $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = L$, artinya terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$\frac{1}{2}L < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2}L.$$

Oleh karena itu, diperoleh $\left(\frac{1}{2}L\right)y_n < x_n < \left(\frac{3}{2}L\right)y_n$ untuk semua $n \geq K$. Sehingga menggunakan Teorema 2.6.4, teorema terbukti.

SOAL LATIHAN SUBBAB 2.6

1. Tunjukkan bahwa jika (x_n) barisan tak terbatas, maka (x_n) memuat barisan bagian yang divergen proper.
2. Tunjukkan bahwa jika $x_n > 0$ untuk semua $n \in N$, maka $lim(x_n) = 0$ jika dan hanya jika $\lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty$.
3. Tentukan apakah barisan berikut ini divergen proper.

   (a) $(\sqrt{n})$

(b) $(\sqrt{n+1})$

(c) $(\sqrt{n-1})$

(d) $\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right)$

4. Diberikan (x_n) barisan divergen proper dan diberikan (y_n) sedemikian hingga $\lim (x_n y_n) \in R$. Tunjukkan bahwa (y_n) konvergen ke 0.
5. Tentukan apakah barisan berikut ini barisan konvergen atau divergen.

(a) $(\sqrt{n^2+2})$

(b) $\left(\frac{\sqrt{n}}{(n^2+1)}\right)$

(c) $\left(\frac{(n^2+1)}{\sqrt{n}}\right)$

(d) $(\sin\sqrt{n})$

6. Tunjukkan bahwa jika $lim\left(\frac{a_n}{n}\right) = L$, dengan $L > 0$, maka $lim(a_n) = +\infty$.

2.7. Deret Tak Hingga

Berikut ini diberikan pengantar singkat mengenai suatu deret tak berhingga dari bilangan real.

Definisi 2.7.1. Jika $X: = (x_n)$ barisan di R, maka **deret tak berhingga** (cukup disebut **deret**) yang dibentuk oleh X adalah barisan $S: = (s_k)$ yang didefinisikan dengan

$$s_1 \coloneqq x_1$$

$$s_2 \coloneqq s_1 + x_2 \qquad\qquad (= x_1 + x_2)$$

. . . . .

$$s_k \coloneqq s_{k-1} + x_2 \qquad\qquad (= x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$

. . . . .

x_n disebut dengan ***terms*** dari deret, dan S_k disebut **jumlahan parsial *(partial sum)*.** Jika lim *S* ada, maka deret *S* dikatakan **konvergen** dan nilai limitnya adalah hasil dari jumlahan deret. Jika limitnya tidak ada, maka dikatakan deret *S* **divergen**.

Deret tak berhingga *S* yang dibangun oleh barisan $X: = (x_n)$ disimbolkan dengan

$$\sum(x_n) \text{ atau } \sum x_n \text{ atau } \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Contoh 2.7.2.

Diberikan barisan $X \coloneqq (r^n)_{n=0}^{\infty}$ dengn $r \in R$ yang membangun deret :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots$$

Akan ditunjukkan bahwa jika $|r| < 1$, maka deret ini konvergen ke $\frac{1}{(1-r)}$.

Misalkan $S_n \coloneqq 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots$ untuk $n \geq 0$, jika S_n dikalikan dengan r dan mengurangkan hasilnya dari S_n, maka diperoleh

$$S_n(1-r) = 1 - r^{n+1}.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$S_n - \frac{1}{1-r} = \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Sehingga

$$\left|S_n - \frac{1}{1-r}\right| \leq \frac{|r|^{n+1}}{|1-r|}.$$

Karena $|r|^{n+1} \to 0$ saat $|r| < 1$, maka deret geometri $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ konvergen ke $\frac{1}{(1-r)}$ saat $|r| < 1$.

Selanjutnya, diberikan kondisi-kondisi yang dapat memberikan jaminan bahwa suatu deret itu konvergen.

Teorema 2.7.3. (The *n*th Term Test)

Jika deret $\sum x_n$ *konvergen*, maka $\lim(x_n) = 0$.

Bukti, Menggunakan Definisi 2.7.1, $\sum x_n$ konvergen apabila $\lim(s_k)$ ada. Karena $x_n = s_n - s_{n-1}$, maka $\lim(x_n) = \lim(s_n) - \lim(s_{n-1}) = 0$.

Teorema 2.7.4. (Kriteria Cauchy) Deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M(\varepsilon) \in N$ sedemikian hingga jika m > n ≥ $M(\varepsilon)$, maka

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \varepsilon$$

Teorema 2.7.5. Diberikan (x_n) Barisan bilangan real nonnegatif. Maka deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika barisan $S = (s_k)$ dari jumlah parsialnya terbatas dalam hal ini,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = lim(s_k) = \sup\{s_k : k \in N\}$$

Bukti. Karena $(x_n) > 0$, maka barisan jumlahan parsial S naik monoton, yaitu

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_k \leq \cdots$$

Menggunakan Teorema 2.3.4., barisan $S = (s_k)$ konvergen jika dan hanya jika barisannya terbatas, dalam hal ini limitnya sama dengan $\sup\{s_k\}$

Contoh 2.7.6. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Konvergen

Karena Jumlahan parsialnya monoton, maka Cukup ditunjukan bahwa barisan bagian (s_k) terbatas. Jika $k_1 := 2^1 - 1 = 1$, maka $s_{k_1} = 1$. Jika $k_2 := 2^2 - 1 = 3$, maka

$$s_{k_2} = \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) < 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2},$$

Dan jika $k_3 := 2^3 - 1 = 7$, maka diperoleh

$$s_{k_3} = s_{k_2} + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} +\right) < s_{k_2} + \frac{4}{4^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$$

Menggunakan induksi matematik, diperoleh bahwa jika $k_j := 2^j - 1$, maka

$$0 < s_{k_j} < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$$

Karena ruas kanan merupakan jumlahan parsial dari deret geometri dengan $r = \frac{1}{2}$,maka lim $(s_k) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})} = 2$. jadi, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *konvergen*.

2.7.7 Tes perbandingan (comparison tests) diberikan barisan bilangan real X:=(x_n) $dan\ Y \coloneqq (y_n)$, dan misalkan untuk suatu $K \in N$ berlaku $0 \le x_n \le y_n$ untuk $n \ge K$.

a. jika $\sum y_n$ $konvergen, maka$ $\sum x_n$ $konvergen$

b. jika $\sum x_n$ $divergen, maka$ $\sum y_n$ $divergen$.

Bukti :

(a). Misalkan

$\sum y_n$ $konvergen. diberikan\ \varepsilon > 0\ dan\ M(\varepsilon) \epsilon N\ sedemikian\ hingga\ jika\ m > n \ge M(\varepsilon), maka$

$$y_{n-1} + \cdots + y_m < \varepsilon$$

Jika $m > \max\{K, M(\varepsilon)\}$, maka diperoleh bahwa

$$0 \le x_{n-1} + \cdots + x_m \le y_{n-1} + \cdots + y_m + < \varepsilon,$$

Yang berakibat bahwa $\sum x_n$ $konvergen$.

(b) Menggunakan kontraposisi dari (a) ,maka teorema terbukti.

2.7.8 Tes perbandingan limit $misalkan\ X \coloneqq (x_n)$ $barisan\ positif\ naik\ tegas\ dan\ misalkan\ limit\ berikut\ ada\ dalam\ R, yaitu$

$$r \coloneqq \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right).$$

(a) $jika\ r \neq 0, maka \sum x_n\ konvergen\ jika\ dan\ hanya\ jika\ \sum y_n\ konvergen$

(b)$jika\ r = 0, maka \sum y_n\ konvergen\ jika\ dan\ hanya\ jika\ \sum x_n\ konvergen$

Bukti.

(a) Diketahui $r \coloneqq \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dan dari soal latihan 2.1.10 maka, terdapat $K \in \mathrm{N}$ sedemikian hungga untuk $\mathrm{n} \ge K$ berlaku $\frac{1}{2}r \le \frac{x_n}{y_n} \le 2r$, sehingga diperoleh

$$\left(\frac{1}{2}r\right)y_n \le x_n \le (2r)y_n.$$

Menggunakan Tes Perbandingan 2.7.7 dua kali, maka pernyataan (a) terbukti.

(b) Jika r=0, maka terdapat $K \in \mathrm{N}$ untuk setiap $\mathrm{n} \ge K$ berlaku

$$0 \le x_n \le y_n.$$

Menggunakan Teorema 2.7.7 (a), maka pernyataan (b) terbukti.

Contoh 2.7.9. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ konvergen.

Diketahui ketaksamaan berikut benar

$$0 \le \frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2} \qquad \text{untuk } n \in \mathbb{N}.$$

Karena telah diketahui bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen, maka menggunakan Tes Perbandingan 2.7.7 diperoleh bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ konvergen.

SOAL LATIHAN SUB BAB 2.7

1.Tunjukkan bahwa

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha} > 0$, jika $\alpha > 0$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

2. Jika $\sum x_n$ dan $\sum y_n$ konvergen, tunjukkan bahwa $\sum (x_n + y_n)$ konvergen.

3. Berikan contoh deret konvergen $\sum x_n$ dan deret divergen $\sum y_n$ sedemikian hingga $\sum (x_n + y_n)$ konvergen. Jelaskan.

4. (a) Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{0} \cos n$ divergen

   (b) Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{0} \frac{\cos n}{n^2}$ konvergen

5. Jika $\sum a_n$ dengan $a_n > 0$ konvergen, maka apakah $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ juga konvergen? Tunjukkan atau beri contoh penyangkalnya jika tidak terbukti.

6. Jika deret $\sum a_n$, dengan $a_n > 0$ konvergen, dan jika $b_n := \frac{(a_1 + .. + a_n)}{n}$ untuk $n \epsilon \mathbb{N}$, maka tunjukkan bahwa $\sum b_n$ divergen

7. Tunjukkan bahwa jika $c > 0$, maka deret berikut ini konvergen.

   (a) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^c}$

(b) $\sum \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^c}$