

Olimpiade Nasional MIPA
Tingkat Perguruan Tinggi 2009

BIDANG MATEMATIKA : KOMBINATORIKA

11 MEI 2009

WAKTU : 75 MENIT

Petunjuk Pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari 2 bagian. Bagian Pertama terdiri dari 8 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 2 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang telah disediakan. Jawaban yang dikehendaki adalah jawaban benar yang terbaik.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang manapun sesuka Anda.
6. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
7. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
8. Bekerjalah dengan cepat, tetapi cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
9. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Nama: _____

Univ./PT: _____

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya himpunan bagian dari $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ yang memuat ketiga elemen a, b dan f adalah . . .

2. Pada setiap titik sudut segitiga ABC diletakkan sebuah titik. Kemudian pada sisi AB diletakkan 4 buah titik, pada sisi BC diletakkan 5 buah titik dan pada sisi AC diletakkan 7 buah titik, banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dari titik-titik tersebut adalah . . .

3. Untuk bilangan bulat $n \geq 1$, $\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} 2^{-k} = \dots$

4. Banyaknya solusi bulat dari persamaan $a + b + c + d = 20$ dengan $a \geq 3$, $b \geq 1$, $c \geq 1$, dan $d \geq 5$ adalah . . .

5. Solusi dari relasi rekurensi $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}$ dengan $a_0 = 1$ adalah. . .

6. Bilangan bulat positif n terbesar agar 2^n membagi koefisien dari y^{10} pada ekspansi $(7y + 5)^{100}$ adalah . . .

7. Pada suatu pesta akan dibuat satu rangkaian hiasan buah yang terdiri dari buah salak, apel dan jeruk. Paling sedikit berapa buah yang harus disediakan untuk menjamin pada rangkaian buah tersebut terdapat 8 salak atau 6 apel, atau 9 jeruk?

8. Banyak cara memilih 4 bilangan berbeda dari himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sehingga dari 4 bilangan terpilih tidak terdapat 2 bilangan berurutan adalah . . .

BAGIAN KEDUA

1. Dari 400 bilangan bulat $1, 2, \dots, 400$ dipilih 201 bilangan. Buktikan bahwa di antara 201 bilangan bulat terpilih terdapat 2 bilangan sehingga satu dari bilangan tersebut akan membagi bilangan yang lain.

2. Diberikan barisan a_1, a_2, \dots, a_{2n} yang terdiri dari n buah 1 dan n buah -1 dengan jumlahan parsialnya memenuhi sifat

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2n)$$

Perlihatkan bahwa banyaknya barisan yang demikian adalah $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.