SELEKSI TINGKAT WILAYAH

OLIMPIADE NASIONAL
MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PERGURUAN TINGGI
(ON MIPA-PT)

TAHUN 2015

TANGGAL	:	8 APRIL 2015
BIDANG	:	MATEMATIKA
SESI	:	1
MATERI	:	ANALISIS REAL
WAKTU	:	120 MENIT

KEMENTERIAN RISET TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI

OLIMPIADE NASIONAL MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PERGURUAN TINGGI 2015
(ONMIPA-PT)

BIDANG MATEMATIKA
8 APRIL 2015
WAKTU: 120 MENIT

Analisis Real

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 8 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 3 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang disediakan. Jawaban yang dikehendaki adalah jawaban benar yang terbaik.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
6. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
7. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
8. Bekerjalah dengan cepat, tetapi cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
9. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Nama: ______________________ Univ./PT: __________

BAGIAN PERTAMA

1. Jika $S = \{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, maka $\sup S =$ ....

2. Bentuk umum fungsi naik tegas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(f(x) + y) = f(x + y) + f(0), \forall x, y \in \mathbb{R}$ adalah ....

3. Diberikan barisan bilangan real nonnegatif yang naik monoton $\{x_k\}$, mempunyai sifat $x_{nk} \geq nx_k$ dan $\sup \frac{x_k}{k} = x < \infty$. Barisan $\left\{\frac{x_k}{k}\right\}$ konvergen ke ....

4. Fungsi $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, dengan $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ dan $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} = 0$. Nilai $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} =$ ....

5. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $f(x) = 4x^2 + 1$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, dan barisan $\{x_n\}$, dengan $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 5k + 6}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Nilai $\lim_{n\to\infty} f(x_n) =$ ....

6. Fungsi $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dikatakan terdiferensial seragam pada (a, b), jika f terdiferensial di setiap titik $x \in (a, b)$ dan memenuhi sifat $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\forall x, y \in (a, b)$ dengan $|x - y| < \delta$, maka $\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x)\right| < \varepsilon$. Contoh fungsi terdiferensial tetapi tidak terdiferensial seragam adalah ....

7. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n x^n$, untuk setiap $-1 < x < 1$. Jika fungsi $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dengan $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, pada $(-1, 1)$, maka nilai $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx =$ ....

8. Jika fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu dan $A = \{x \in \mathbb{R} : f^2(x) \leq 1\}$, maka klosur dari A, yaitu $\overline{A} =$ ....

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

BAGIAN KEDUA

1. Diketahui barisan $\{x_n\}$, dengan $x_n \geq 1$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Didefinisikan barisan $\{y_n\}$, dengan $y_n = x_n + \dfrac{2}{x_n}$, untuk setiap n. Jika $\{y_n\}$ konvergen, buktikan bahwa $\{x_n\}$ konvergen.

Nama: ______________________________ Univ./PT: ___________

2. Misalkan f fungsi bernilai real terdiferensialkan pada $[a, b]$, dengan $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ dan $f(a) = f(b) = 0$. Tunjukkan terdapat $x_o \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$|f'(x_o)| > \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Nama: ____________________ Univ./PT: __________

3. Diketahui fungsi φ konveks pada $\mathbb{R}$ dan f terintegral pada $[0,1]$. Buktikan bahwa

$$\int_0^1 \varphi(f(t))\,dt \geq \varphi\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right).$$

SELEKSI TINGKAT WILAYAH

OLIMPIADE NASIONAL
MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PERGURUAN TINGGI
(ON MIPA-PT)

TAHUN 2015

TANGGAL	:	8 APRIL 2015
BIDANG	:	MATEMATIKA
SESI	:	2
MATERI	:	KOMBINATORIKA
WAKTU	:	120 MENIT

KEMENTERIAN RISET TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI

Olimpiade Nasional MIPA
Tingkat Perguruan Tinggi 2015

BIDANG MATEMATIKA: KOMBINATORIKA
8 APRIL 2015
WAKTU: 120 MENIT

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 8 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 3 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang disediakan. Jawaban yang dikehendaki adalah jawaban benar yang terbaik.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
6. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
7. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
8. Bekerjalah dengan cepat, tetapi cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
9. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

BAGIAN PERTAMA

1. Pada babak final sebuah turnamen, tim pemenang adalah tim yang pertama sekali memenangkan dua pertandingan secara berurutan atau tim yang pertama sekali memenangkan empat pertandingan. Banyaknya cara turnamen dapat terjadi adalah ....

2. Banyaknya cara mengisi persegi panjang berukuran 2×16 dengan persegi panjang yang berukuran 2×2, 2×3, 2×4 adalah ....

3. Enam komite akan dibentuk dari 14 orang. Bila 2 komite dari 6 komite ini terdiri atas 3 orang dan sisanya terdiri atas masing-masing 2 orang, maka banyaknya komite yang dapat dibentuk adalah ....

4. Sebuah *password* terdiri atas 7 huruf dibentuk dengan menggunakan huruf kapital. Sebuah *password* dikatakan legal bila memenuhi dua kondisi: (i) tidak terdapat huruf berulang, (ii) huruf X dan Y tidak saling berdekatan. Besarnya peluang untuk membentuk *password* legal adalah ....

5. Diberikan sebuah barisan (x_n) dengan suku ke n adalah $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ dimana $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Relasi rekursif yang memenuhi barisan (x_n) adalah ...

6. Lima buah dadu (enam sisi) digulirkan. Peluang bahwa mata dadu yang muncul berjumlah 14 adalah ...

7. Setiap bujursangkar pada persegi panjang berukuran $1 \times n$ diwarnai dengan menggunakan satu dari tiga warna merah, putih, atau biru. Banyak cara mewarnai persegi $1 \times n$ dengan merah, putih atau biru sehingga terdapat genap buah bujursangkar berwarna putih adalah ....

8. Untuk setiap bilangan asli $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq 2$, nilai dari

$$\frac{1}{n}\binom{n}{1} + \frac{2}{n}\binom{n}{2} + \frac{3}{n}\binom{n}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n}\binom{n}{n-1}$$

adalah ....

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

BAGIAN KEDUA

1. Suatu graf Λ disebut komplemen dari graf Γ jika $V(\Lambda) = V(\Gamma)$ dan sisi $e = (u, v) \in E(\Lambda)$ jika dan hanya jika sisi $e = (u, v) \notin E(\Gamma)$. Komplemen dari graf Γ ditulis $\overline{\Gamma}$. Tentukan bilangan bulat positif terkecil N sedemikian sehingga untuk setiap sebarang graf Γ dengan N titik senantiasa memuat graf lengkap K_3 sebagai subgraf atau graf $\overline{\Gamma}$ memuat graf lengkap K_3 sebagai subgraf. Kemudian, buktikan!

Nama: ______________________________ Univ./PT: ___________

2. Sebuah papan catur C terdiri dari i baris dan j lajur. Misalkan b menyatakan banyaknya maksimal benteng yang dapat diletakkan pada C sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang. Tentukan banyaknya cara meletakkan b buah benteng pada C sedemikian sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang. [Catatan: Pada permainan catur, gerak benteng adalah berarah horizontal (pada baris) dan vertikal (pada lajur).]

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

3. Misalkan n adalah sebuah bilangan bulat positif. Buktikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

SELEKSI TINGKAT WILAYAH

OLIMPIADE NASIONAL
MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PERGURUAN TINGGI
(ON MIPA-PT)

TAHUN 2015

TANGGAL	:	9 APRIL 2015
BIDANG	:	MATEMATIKA
SESI	:	1-1
MATERI	:	ANALISIS KOMPLEKS
WAKTU	:	60 MENIT

KEMENTERIAN RISET TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI

Olimpiade Nasional Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

PERGURUAN TINGGI 2015

(ONMIPA-PT)

Bidang Matematika

9 April 2015

Waktu: 60 menit

Analisis Kompleks

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 4 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 2 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang disediakan. Jawaban yang dikehendaki adalah jawaban benar yang terbaik.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
6. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
7. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
8. Bekerjalah dengan cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
9. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

BAGIAN PERTAMA

1. Hitung bagian real dan imajinair dari bilangan kompleks

$$\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1}$$

2. Hitung nilai

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{\sin^2 z} \right)$$

3. Hitung nilai

$$\oint_C \frac{e^z}{(z + \pi i)^3} dz$$

dengan C adalah lingkaran dengan pusat 0 dan jari-jari 4.

4. Jika f adalah fungsi penuh (entire), $f(0) = 1$ dan berlaku $|f(z) - e^z \sin 2z| < 4$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$, maka tentukan nilai dari $f(1)$.

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

BAGIAN KEDUA

1. Kerjakan dua soal berikut

   (a) Tentukan nilai
   $$\min_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Im} z^5}{(\mathrm{Im} z)^5}$$

   (b) Tentukan nilai k sehingga peta dari lingkaran $|z-1|=k$ oleh fungsi kompleks $f(z)=\frac{z-3}{1-2z}$ adalah sebuah garis lurus.

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

2. Hitunglah

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{2it}-3it}\,dt$$

SELEKSI TINGKAT WILAYAH

OLIMPIADE NASIONAL
MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PERGURUAN TINGGI
(ON MIPA-PT)

TAHUN 2015

TANGGAL	:	9 APRIL 2015
BIDANG	:	MATEMATIKA
SESI	:	1-2
MATERI	:	STRUKTUR ALJABAR
WAKTU	:	60 MENIT
[redacted]		

KEMENTERIAN RISET TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI

Olimpiade Nasional Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
PERGURUAN TINGGI 2015
(ONMIPA-PT)

Bidang Matematika
9 April 2015
Waktu: 60 menit

Struktur Aljabar

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 4 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 2 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang disediakan. Jawaban yang dikehendaki adalah jawaban benar yang terbaik.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
6. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
7. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
8. Bekerjalah dengan cepat, tetapi cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
9. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Definisi dan Notasi

Jika G suatu grup, *orde grup* $G = |G|$ adalah banyaknya unsur dalam G.

Jika R suatu ring, $a \in R-\{0\}$ dinamakan *pembagi nol* jika terdapat $b \in R-\{0\}$ sehingga $ab = 0$.

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan G, H dan K grup hingga. Misalkan pula homomorfisma $\varphi : G \to H$ dan homomorfisma $\psi : H \to K$ memenuhi $Im(\varphi) = Ker(\psi)$. Jika ψ homomorfisma surjektif dan $|K| = |H| = n$, maka $|Im(\varphi)| =$ ....

2. Banyaknya polinom tak tereduksi di $\mathbb{Z}_2[x]$ yang berderajat 3 adalah ....

3. Banyaknya pembagi nol di $\mathbb{Z}_{100}$ adalah ....

4. Misalkan R adalah ring dengan identitas perkalian dan $x \in R$ memenuhi $x^2 = x$. Maka balikan (invers) dari $2x - 1$ adalah......................

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan G suatu grup yang memiliki subgrup berorde 2015. Buktikan bahwa irisan semua subgrup dari G yang berorde 2015 merupakan subgrup normal dari G.

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

2. (a) Jika I ideal di $M_2(\mathbb{R})$ yang memuat $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, untuk suatu $a \neq 0$, buktikan bahwa $I = M_2(\mathbb{R})$.

   (b) Tentukan semua ideal di ring $M_2(\mathbb{R})$.

SELEKSI TINGKAT WILAYAH

OLIMPIADE NASIONAL
MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PERGURUAN TINGGI
(ON MIPA-PT)

TAHUN 2015

TANGGAL	:	9 APRIL 2015
BIDANG	:	MATEMATIKA
SESI	:	2
MATERI	:	ALJABAR LINIER
WAKTU	:	120 MENIT

KEMENTERIAN RISET TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI

OLIMPIADE NASIONAL MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PERGURUAN TINGGI 2015
(ONMIPA-PT)

BIDANG MATEMATIKA
9 APRIL 2015
WAKTU: 120 MENIT

Aljabar Linier

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 8 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 3 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang disediakan. Jawaban yang dikehendaki adalah jawaban benar yang terbaik.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
6. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
7. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
8. Bekerjalah dengan cepat, tetapi cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
9. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Definisi dan notasi:

$\mathbb{R}^{k\times m}$: himpunan semua matriks real berukuran $k \times m$

P_k: ruang polinom real berderajat paling tinggi k

A^t: transpos matriks A

$\text{Inti}(T)$: himpunan $\{v \in U \mid T(v) = 0\}$ jika U, V ruang vektor dan $T : U \longrightarrow V$ linier

$\text{Peta}(T)$: himpunan $\{T(v) \in V \mid v \in U\}$ jika U, V ruang vektor dan $T : U \longrightarrow V$ linier

$K^\perp$: komplemen ortogonal dari subruang K di ruang vektor V

$\|x\|_2$: norma Euklid untuk x, diperoleh dari hasilkali titik

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan A, B, C berturut-turut matriks berukuran $m \times m, n \times n$ dan $n \times m$. Jika $\det(A) = 2$ dan $\det(B) = 3$, , maka $\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix} = \ldots.$

2. Diketahui bahwa $a \neq 0$. Agar himpunan $\{a + bx, ax + bx^2, b + ax^3\}$ bergantung linier di ruang vektor P_4, a dan b haruslah memenuhi hubungan ....

3. Di $\mathbb{R}^3$, subruang K dibangun oleh $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ dan subruang L dibangun oleh $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Maka $K \cap L = \ldots.$

4. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Pemetaan linier T memenuhi $T(X) = AX - XA$, untuk setiap $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Maka dimensi $\text{Inti}(T)$ adalah ....

5. Diketahui bahwa $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen matriks $\begin{bmatrix} a-1 & a \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Maka nilai eigen untuk u adalah ....

6. Banyaknya matriks real diagonal berukuran $n \times n$ yang ortogonal adalah ....

7. Diketahui matriks-matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} c & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Agar matriks AB dapat didiagonalisasi ortogonal, haruslah $(a, b, c) = \ldots.$

8. Di ruang vektor P_2 kita definisikan hasilkali dalam $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\, dt$, untuk setiap $p, q \in P_2$. Jika K dibangun oleh $\{1, x\}$, maka $K^{\perp} = \ldots.$

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan a_1, a_2, b_1, b_2 empat vektor di $\mathbb{R}^3$ yang memenuhi $\|a_1\|_2 = \|b_1\|_2 = 1$. Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ memenuhi $A^t B = I_2$, matriks identitas 2×2.

   (a) Tunjukkan bahwa keempat vektor tersebut dapat dipilih sehingga $B^t A = \mathrm{diag}(1, 1, 0)$.

   (b) Dapatkah keempat vektor tersebut dipilih sehingga $B^t A$ bukan matriks diagonal? Berikan alasannya.

Nama: ______________________________ Univ./PT: ___________

2. Misalkan U, V, W ruang-ruang vektor atas lapangan F, $\dim(V) = m$, dan $\dim(U) = n$. Misalkan pula $T : V \longrightarrow W$ linier dan satu-satu, sedangkan $S : W \longrightarrow U$ linier dan pada. Jika $\text{Peta}(T) = \text{Inti}(S)$, tentukan $\dim(W)$.

Nama: ______________________________ Univ./PT: __________

3. Misalkan $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ memenuhi $A^2 = I$.

   (a) Tunjukkan bahwa 1 dan -1 adalah semua nilai eigen A.

   (b) Jika $E(1)$ dan $E(-1)$ adalah ruang-ruang eigen A, buktikan bahwa $\mathbb{R}^n = E(1) \oplus E(-1)$.