1. Tentukan nilai $5\,Re\,(z) + 7\,Im\,(z)$ jika $z = (3 - 3i)^{2010}$

   Solusi

$$z = (3-3i)^{2010} = \left(3\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{2010} = \left(3\sqrt{2}\right)^{2010} e^{-i.2010/4}$$
$$= \left(3\sqrt{2}\right)^{2010} \left(\cos\left(-2010\pi/4\ \right) + \sin\left(-2010\pi/4\ \right)\right)$$
$$= \left(3\sqrt{2}\right)^{2010} \left(\cos\pi/2\ \ - i\sin\pi/2\ \right) = -\left(3\sqrt{2}\right)^{2010} i$$

   Jadi $5\,Re\,(z) + 7\,Im\,(z)\ = -7.3^{2010}.2^{1005}$

2. Tentukan nilai integral berikut jika C adalah lingkaran $|z+5| = 3$.

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$$

   Solusi :

   Tetapkan

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$$

   C hanya memuat pole sederhana dari $f\,(z)$ di $z = -4$, sehingga menurut teorema integral residu

$$\oint\limits_C f\,(z)\,dz = 2\pi i \mathop{Res}_{z=-4} f\,(z) = 2\pi i \lim_{z\to -4} (z+4)\,f\,(z) = 2\pi i \lim_{z\to -4} \left(\tfrac{1}{z^3}\right) = -\tfrac{\pi i}{32}$$

3. Dengan menggunakan

$$\int_C \frac{dz}{z+1}$$

   C lingkaran $|z| = 2$, Hitunglah

$$\int_C \frac{(x+1)dy - ydx}{(x+1)^2+y^2}$$

   Solusi :

   Menurut teorema cauchy

$$\int_C \frac{dz}{z+1} = 2\pi i\ .$$

   disisi lain kita memiliki

$$\int_C \frac{dz}{z+1} = \int_C \frac{1}{z+1}\frac{\overline{z+1}}{\overline{z+1}}dz = \int_C \frac{\bar{z}+1}{|z+1|^2}dz = \int_C \frac{(x+1)-iy}{(x+1)^2+y^2}(dx+idy)$$
$$= \oint\limits_C \frac{(x+1)dx+ydy}{(x+1)^2+y^2} + i\oint\limits_C \frac{(x+1)dy-ydx}{(x+1)^2+y^2}$$

   Karena dua buah integral terakhir masing masing bernilai real, maka dengan membandingkan bagian real dan khayal dengan hasil sebelumnya diperoleh nilai yang diinginkan yaitu 2π.

4. Diketahui $f(z) = z^5 + 2z^3 - 3iz^2 + 2z - 1 + i$. Jika C adalah lingkaran yang melingkupi semua akar $f(z)$. Hitung

$$\int_C \frac{f'(z)dz}{f(z)}$$

Solusi :

Pada kasus yang dihadapi $f(z)$ memiliki 5 buah nol yang semuanya termuat dalam C dan $f(z)$ tidak memiliki pole, sehingga menurut teorema argumen nilai integral yang dimaksud adalah $2\pi i(5) = 10\pi i$.

5. Misalkan $\{a_n\}$ barisan bilangan kompleks dengan $\sum |a_n| < \infty$ dan $\sum n|a_n| = \infty$. Tentukan jari – jari konvergensi deret $\sum a_n 2^n z^n$

Bagian II

1. Misalkan f fungsi analitik di $z_0 \in \Omega$ dengan $f'(z_0) \neq 0$. Jika C adalah lingkaran yang cukup kecil yang melingkari z_0, hitunglah kedua integral berikut

$$\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)^2}dz \ldots (i) \text{ dan } \int_C \frac{dz}{f(z)-f(z_0)} \ldots (ii)$$

Solusi

Kita dapat menuliskan integral pertama menjadi

$$\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)^2}dz = \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} - f(z_0)\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^2}$$

menurut teorema integral cauchy

$$\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} = 2\pi i f'(z_o) \text{ dan } \int_C \frac{dz}{(z-z_0)^2} = 0 \text{ .}$$

jadi

$$\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)^2} = 2\pi i f'(z_o)$$

Untuk pengintegralan yang kedua (ii),

Karena C berjari jari kecil, maka penulis asumsikan bahwa di dalam C,fungsi integran hanya memiliki pole di z_0. Menurut teorema cauchy kita dapat membuat lingkaran Γ di dalam C dengan jari jari ε yang melingkupi $z_0$sehingga

$$\int_C \frac{dz}{f(z)-f(z_0)} = \int_\Gamma \frac{dz}{f(z)-f(z_0)}$$

Karena εdapat dibuat sekecil mungkin kita peroleh

$$\int_C \frac{dz}{f(z)-f(z_0)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Gamma \frac{dz}{f(z)-f(z_0)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Gamma \frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}\frac{dz}{z-z_0}$$

$$= \frac{1}{f'(z_0)}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}$$

(hasil akhir di atas tidak berlaku lagi jika fungsi integran memiliki pole selain z_0 di dalam C)

2. Tentukan peta himpunan $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3, 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{6} \right\}$ oleh pemetaan $f(z) = -iz^3$

Solusi

Tulis $z = re^{i\theta}$ dan misalkan $B = \{ z' \, | z' = f(z) ; z \in A \}$ peta A oleh f. Maka

Yang berarti setiap $z \in A$ dipetakan oleh f ke $z' \in B$ dengan $|z'| = r^3$ dan $\arg(z') = 3\theta - \frac{\pi}{2}$.

Karena $1 < |z| = r < 3$ maka $1 < r^3 = |z'| < 27$, dan karena $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ maka $0 < 3\theta < \frac{\pi}{2}$ atau $-\frac{\pi}{2} < \left(3\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \arg(z') < 0$. Dengan demikian hasil pemetaan A oleh f adalah

$$B = \left\{ z' \in \mathbb{C} \left| 1 < |z'| < 27, -\frac{\pi}{2} < \arg(z') < 0 \right. \right\}$$